XVIII

Suites de référence

Dans tout ce document, $\mathbb{K}$ désignera le corps des scalaires $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

I Suite arithmétique

Définition 1 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé la *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ...
- La suite des multiples de 3 : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, ..., $u_n = 3n$, ...

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \ldots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \dfrac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n-m)r$	$(n-m+1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$

Preuve : Histoire de réviser le raisonnement par récurrence, montrons le dernier résultat.

On suppose $m \in \mathbb{N}$ fixé et on montre que la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_m + \ldots + u_n = (n-m+1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ plus grand que m.

1. Pour $n = m$, on a bien $(\cancel{n} - \cancel{m} + 1) \times \dfrac{u_m + u_m}{2} = 1 \times \dfrac{\cancel{2}u_m}{\cancel{2}} = u_m$ donc $\mathcal{P}_m$ est vérifiée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$, tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée i.e.

$$u_m + \ldots + u_k = (k-m+1) \times \frac{u_m + u_k}{2}.$$

Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse i.e.

$$u_m + \ldots + u_k + u_{k+1} = (k+1-m+1) \times \frac{u_m + u_{k+1}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } u_m + \ldots + u_k + u_{k+1} &= (k-m+1) \times \frac{u_m + u_k}{2} + u_{k+1} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m+u_k) + 2u_{k+1}}{2} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m+u_k) + u_{k+1} + u_m + (k+1-m)r}{2} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m + u_k + r) + u_{k+1} + u_m}{2} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m + u_{k+1}) + u_{k+1} + u_m}{2} \\
&= \frac{(k-m+2)(u_m + u_{k+1})}{2}.
\end{aligned}$$

La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée et la propriété est héréditaire.

3 La propriété $\mathcal{P}$ est donc initialisée au rang m et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, plus grand que m.

Méthode 1 (Montrer qu'une suite est arithmétique) :
Une suite est arithmétique si, et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, on exprime, pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n$ indépendamment de n.
- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique, on trouve deux entiers m et n tels que $u_{m+1} - u_m \neq u_{n+1} - u_n$.

II Suite géométrique

Définition 2 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le nombre réel q est appelé la *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \ldots + u_n$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\dfrac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$.
				$u_m \times \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Preuve : De même pour une suite géométrique de raison q le raisonnement est identique en plus facile.

On pose :

$$\mathcal{P}_n : u_m + \dots + u_n = u_m \times \frac{1 - q^{n+1-m}}{1-q}$$

pour $q \neq 1$, le cas $q = 1$ étant trivial.

1. Pour $n = m$, on a : $u_m \times \dfrac{1 - q^{\cancel{m}+1-\cancel{m}+1}}{1-q} = u_m \dfrac{\cancel{1-q}}{\cancel{1-q}} = u_m$. La propriété est initialisée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée. On a alors :

$$\begin{aligned}
u_m + \dots + u_k + u_{k+1} &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} \\
&= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} + q^{k+1-m} u_m \\
&= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m} + (1-q)q^{k+1-m}}{1-q} \\
&= u_m \times \frac{1 - q^{k+1-m} + q^{k+1-m} - q^{k+1-m+1}}{1-q} \\
&= u_m \times \frac{1-q^{k+2-m}}{1-q}.
\end{aligned}$$

La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie sous l'hypothèse $\mathcal{P}_k$. La propriété est héréditaire.

3. Initialisée au rang m et héréditaire, la relation $\mathcal{P}$ est donc vraie pour tout $n \geqslant m$.

Méthode 2 (Montrer qu'une suite est géométrique) :
Une suite est géométrique si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q on montre que u_n n'est jamais nul et on exprime, pour n quelconque, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ indépendamment de n.
- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, on montre que u_n s'annule pour un certain n ou on trouve deux entiers m et n tels que $\dfrac{u_{m+1}}{u_m} \neq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser le premier terme et la raison.
2. Calculer, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} u_k$.

III Suite aritmético-géométrique

Définition 3 (Suite arithmético-géométrique) : Pour tout couple de scalaires $(a\,;b)$ avec $a \neq 1$, on appelle suite *arithmético-géométrique* toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$, une suite géométrique.

Théorème 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad$ avec $\quad c = \dfrac{b}{1-a}$.

Le réel c, solution de l'équation $x = ax + b$ est appelé *point fixe* de la suite.

Preuve :

1. On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$ dont l'unique solution est

$$c = \frac{b}{1-a}.$$

Remarque : c est appelé « point invariant » ou « point fixe » de la fonction f associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x \longmapsto ax + b$. On verra plus tard que c est l'unique candidat à la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On introduit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - c.$$

(a) La $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

En effet, des deux équations :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ c & = & ac + b \\ \hline u_{n+1} - c & = & a(u_n - c) \end{array}$$

on obtient, par soustraction $v_{n+1} = av_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - c$.

(b) On en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - c).$$

3. On revient enfin à la suite initiale : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + c$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad$ avec $\quad c = \dfrac{b}{1-a}$.

Remarque : La démonstration montre que la suite définie par $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique de raison a.

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) : En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général u_n.

Exercice 2 : On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier naturel n soit géométrique.
2. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer les sommes $v_0 + v_1 + ... + v_{10}$ puis $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

IV Suite homographique

Définition 4 (Suite homographique) : On appelle suite *homographique* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0.$$

Remarque : Si $ad - bc = 0$, alors, de même que la fonction homographique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

On commence ici aussi par chercher les *points fixes* de la fonction associée *i.e.* les solutions de l'équation :

$$x = \frac{ax+b}{cx+d} \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0. \qquad \text{(Hom)}$$

Proposition 2 :

1. Si (Hom) admet deux racines distinctes α et β alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.
2. Si (Hom) admet une racine double γ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \gamma}$ est arithmétique de raison $r = \dfrac{2c}{a+d}$.

Preuve : Posons $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1. Supposons que (Hom) admette deux racines distinctes α et β.

– Montrons tout d'abord que $\dfrac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = q\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$ où $q = \dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$ en utilisant que $h(\alpha)=\alpha$ et $h(\beta)=\beta$.

$$\frac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = \frac{h(x)-h(\alpha)}{h(x)-h(\beta)} = \frac{\dfrac{ax+b}{cx+d}-\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}{\dfrac{ax+b}{cx+d}-\dfrac{a\beta+b}{c\beta+d}} = \frac{\dfrac{(ax+b)(c\alpha+d)-(a\alpha+b)(cx+d)}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\dfrac{(ax+b)(c\beta+d)-(a\beta+b)(cx+d)}{(cx+d)(c\beta+d)}}$$

$$= \frac{\dfrac{axc\alpha + adx + bc\alpha + bd - axc\alpha - ad\alpha - bcx - bd}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\dfrac{axc\beta + adx + bc\beta + bd - axc\beta - ad\beta - bcx - bd}{(cx+d)(c\beta+d)}}$$

$$= \frac{\dfrac{ad\,(x-\alpha) - bc\,(x-\alpha)}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\dfrac{ad\,(x-\beta) - bc\,(x-\beta)}{(cx+d)(c\beta+d)}} = \frac{\dfrac{(x-\alpha)(ad-bc)}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\dfrac{(x-\beta)(ad-bc)}{(cx+d)(c\beta+d)}}$$

$$= \frac{(x-\alpha)(ad-bc)}{(cx+d)(c\alpha+d)} \times \frac{(cx+d)(c\beta+d)}{(x-\beta)(ad-bc)}$$

$$= \frac{x-\alpha}{x-\beta} \times \underbrace{\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}}_{q} = q \times \frac{x-\alpha}{x-\beta}$$

– La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ vérifie alors la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{h(u_n)-\alpha}{h(u_n)-\beta} = q \times \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = qv_n.$$

La suite v_n est donc géométrique de raison q et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$.

2 Supposons que (Hom) admette une racine double γ. Le raisonnement est identique.

– On montre tout d'abord que $\dfrac{1}{h(x)-\gamma} = \dfrac{1}{x-\gamma} + r$ avec $r = \dfrac{2c}{a+d}$

$$\frac{1}{h(x)-\gamma} = \frac{1}{h(x)-h(\gamma)} = \frac{1}{\dfrac{ax+b}{cx+d}-\dfrac{a\gamma+b}{c\gamma+d}} = \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{(ax+b)(c\gamma+d)-(cx+d)(a\gamma+b)}$$

$$= \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{axc\gamma + adx + bc\gamma + bd - axc\gamma - bcx - ad\gamma - bd}$$

$$= \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{ad\,(x-\gamma) - bc\,(x-\gamma)} = \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{(ad-bc)(x-\gamma)}$$

$$= \frac{c\gamma+d}{ad-bc} \times \frac{c\,(x-\gamma) + c\gamma + d}{x-\gamma}$$

$$= \frac{(c\gamma+d)^2}{ad-bc} \times \frac{1}{x-\gamma} + \frac{c(c\gamma+d)}{ad-bc}$$

À ce stade, c'est un peu technique : γ est la racine double de l'équation (Hom) i.e. , en se rappelant son cours de première, $\gamma = \dfrac{a-d}{2c}$. On obtient alors :

$$c\gamma + d = \frac{a+d}{2}. \qquad \text{(XVIII.1)}$$

Comme le discriminant de (Hom) est nul, on obtient aussi $(d-a)^2+4bc=0$ dont on tire :

$$ad-bc=ad+\frac{(d-a)^2}{4}=\frac{4ad+(d-a)^2}{4}=\frac{(d+a)^2}{4}. \tag{XVIII.2}$$

En combinant (XVIII.1) et (XVIII.2), on obtient alors :

$$\frac{(c\gamma+d)^2}{ad-bc}=\frac{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}{\frac{(a+d)^2}{4}}=1 \quad \text{et} \quad \frac{c(c\gamma+d)}{ad-bc}=\frac{c\frac{a+d}{2}}{\frac{(a+d)^2}{4}}=\frac{2c}{a+d}. \tag{XVIII.3}$$

Avec (XVIII.3), on obtient alors :

$$\frac{1}{h(x)-\gamma}=\frac{1}{x-\gamma}+\underbrace{\frac{2c}{a+d}}_{r}.$$

– La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=\dfrac{1}{u_n-\gamma}$ vérifie alors la relation de récurrence :

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-\gamma}=\frac{1}{h(u_n)-\gamma}=\frac{1}{u_n-\gamma}+\frac{2c}{a+d}=v_n+r.$$

La suite v_n est donc arithmétique raison $r=\dfrac{2c}{a+d}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0-\gamma}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ avec :

$$f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{-4\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{2x-1}{x+4}.\end{array}$$

1. Montrer que $f(]-1\,;+\infty[)\subset\,]-1\,;+\infty[$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Montrer que l'application f admet -1 comme unique point fixe.
4. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
5. Montrer que que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.