Dérivabilité

1 Énoncer la formule de Leibniz avec ses hypothèses.

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et I, J des réunions d'intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. $\forall f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$,

$$f \times g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

(Formule de Leibniz)

2 Énoncer le théorème de Rolle.

Théorème 9 (Théorème de Rolle [1]) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$. $\quad (a < b)$

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3 Énoncer le théorème des accroissements finis.

Théorème 10 (Égalité des accroissements finis) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. $\quad (a < b)$

Alors, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4 Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

Théorème 11 (Inégalité des accroissements finis) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in \,]a\,;b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$ alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

5 Énoncer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Corollaire 15.1 (Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

6 Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^8}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

- f est clairement définie sur $\mathbb{R}$.
- Comme $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^8}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'après les théorèmes généraux sur les compositions de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{8}{x^9}\, e^{-\frac{1}{x^8}}$$
- Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^8} = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$, d'après les théorèmes sur les limites de composées, on a aussi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.
- D'après les théorèmes de croissance comparées, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8}{x^9}\, e^{-\frac{1}{x^8}} = 0 < \infty$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ est finie. D'après le corollaire (15.1) , elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(0) = 0$.

7 Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left[\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \tan(x) \end{array}$ est k-lipschitzienne avec $k \in \mathbb{R}$ à préciser.

Par π-périodicité, la question est identique sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ sur lequel la La fonction tan est croissante, dérivable et impaire.

Sa dérivée f' définie par $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ est donc majorée par $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$:
$$\sup_{x\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]} |f'(x)| = 2.$$

On conclut avec l'inégalité des accroissements finis : Pour tout $x \neq y \in \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ (on peut supposer $x < y$), f est continue sur $[x ; y]$, dérivable sur $]x ; y[$ et telle que $\sup\limits_{x\in[x;y]} |f'(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]} |f'(x)| = 2$.

D'où, $|\tan(y) - \tan(x)| \leqslant 2\,|y - x|$.

L'inégalité étant également vraie pour $x = y$, la fonction f est 2-lipschitzienne sur $\left[\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right]$.

8 Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse le cas échéant.

Correction :
$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$