Étude de fonctions

On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}. \end{array}$$

1 Déterminer D, le domaine de définition de f.

2 (a) Trouver un intervalle D′, le plus grand possible, sur lequel f est dérivable puis calculer f'.

(b) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$? Justifier bien sûr.

3 (a) Montrer que $\forall\ x \in \mathrm{D}',\ \ f'(x) = \dfrac{1-x}{2x} f(x)$.

(b) Dresser le tableau de variations complet de f sur D.

4 Établir que f réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur un segment $[a\,;b]$ à préciser.

On notera g la bijection réciproque.

5 Justifier que g est dérivable sur $]a\,;b[$ puis montrer que $\forall\ x \in\ ]a\,;b[,\ \ g'(x) = \dfrac{2g(x)}{x(1-g(x))}$.

6 On pose $\alpha = \sqrt{\dfrac{\ln 2}{2}}$. Trouver la valeur de $g(\alpha)$ puis en déduire celle de $g'(\alpha)$.

On considère dorénavant la fonction φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [1\,;+\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & g(f(x)). \end{array}$$

7 Justifier que φ est bien définie.

8 Montrer (intelligemment) que φ est strictement monotone sur $[1\,;+\infty[$ (on précisera la monotonie en question).

9 Justifier que φ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ puis montrer que :

$$\forall\ x \in\ ]1\,;+\infty[,\ \ \varphi'(x) = \frac{(1-x)\varphi(x)}{x(1-\varphi(x))}.$$

10 Retrouver alors la stricte monotonie de φ établie précédemment.