Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Image d'un intervalle par une fonction continue.*

Exercice 1 : Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (x^3+x-2)^4$
2. $x \longmapsto \tan^3 x$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Théorème des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 2 : Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par

$$f(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
2. $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Tout extremum intérieur est un point critique et théorème de Rolle.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in \mathrm{I}$, $f(x)^2 = 1$.

Montrer que $f \equiv 1$ ou $f \equiv -1$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
2. $x \longmapsto \pi^{x^2-1}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Égalité des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $(f(0)-g(0))(f(1)-g(1)) \leqslant 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1], f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto x^2\sqrt{x}$
2. $x \longmapsto \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Formule de Leibniz.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, non constante, telle que $f(a) = f(b)$.
On note $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\mathrm{M} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Montrer que tout $\alpha \in]m, \mathrm{M}[$ admet au moins deux antécédents par f dans $[a, b]$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$
2. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.*

Exercice 1 : Trouver les solutions de

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
Montrer que f est bornée et que f atteint ses bornes.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$
2. $x \longmapsto x^{x^x}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Image d'un intervalle par une fonction continue.*

Exercice 1 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y, z) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à $]-\infty, -a]$ ou à $[a, +\infty[$, on a :
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{a^2}|x - y|.$$
2. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x - x_0| < \alpha \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon.$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{2x^3 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}}$
2. $x \longmapsto (1 + x^4)^{1-2x}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Théorème des accroissements finis.*

Exercice 1 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \\ a^3x + b^3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Pour tout n entier naturel et tout couple de réels (x, y), établir la formule :

$$x^n - y^n = (x - y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

2. Déduire de la question précédente que pour tout entier n tout réel strictement positif a et tout couple de réels (x, y) tel que $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant a$,

$$|x^n - y^n| \leqslant na^{n-1}|x - y|.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ |x^n - x_0^n| < \epsilon.$$

Conclure quant à la continuité de $x \longmapsto x^n$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$

2. $x \longmapsto \ln\sqrt{1 + x^2}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Tout extremum intérieur est un point critique et théorème de Rolle.*

Exercice 1 : Résoudre $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x+2y+z-2t=0 \\ 3x+2z-t=4 \end{cases}$

Exercice 2 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2x+|x|}$.

Déterminer le domaine de définition de f.

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$
2. $x \longmapsto x^{x^2}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Égalité des accroissements finis.*

Exercice 1 : Un cycliste va d'une ville A à une ville B. Le parcours compte x kilomètres de montée, y kilomètres de plat et z kilomètres de descente. Il roule à 15 km/h en montée, 20km/h sur le plat et 30km/h en descente. Il met deux heures à effectuer le trajet aller et trois heures pour le retour.

1. Mettre le problème en équations.
2. Un autre cycliste qui roule respectivement à 20, et 30 et 40 km/h sur chaque type de route, effectue l'aller-retour en un temps total de trois heures quarante minutes. Déduire une équation supplémentaire.
3. Déterminer les valeurs de x, y et z.
4. Sachant que les montées et descentes ont toutes une même pente de 5%, déterminer la différence d'altitude des deux villes, ainsi que celle qui est située le plus haut.

Exercice 2 :

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.

   Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

   Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
2. $x \longmapsto x^x$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Formule de Leibnitz.*

Exercice 1 : Déterminer selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le rang du système suivant :

$$\begin{cases} (2-m)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (5-m)y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + (5-m)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

Montrer que la fonction $g(t) = f\left(t + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $\left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure.

Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
2. $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 6x - 1}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant selon le paramètre a :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$.

Montrer que si $f([a, b])$ est fini, alors f est constante.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (x^3+x-2)^4$
2. $x \longmapsto \tan^3 x$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Image d'un intervalle par une fonction continue.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Rappeler que pour tout nombre réels $\epsilon > 0$ il existe un entier n tel que :

$$\frac{1}{2n\pi} < \epsilon \qquad \textit{et} \qquad \frac{1}{(2n+1)\pi} < \epsilon.$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ tel que :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - l\right| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.
4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$
2. $x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Théorème des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ -2x + 3y + z - 4t = 1 \\ -3x + 5y + 4z - 7t = a \\ -x + 2y + 3z - 3t = b \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in \mathrm{I}$. Montrer que :

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$

2. On suppose que f et g sont continues sur I.

   Montrer que la fonction $\sup(f, g)$ définie $\sup(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ par est continue sur I.

Exercice 3 : Soit $f : x \longmapsto 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$.
Déterminer deux réels a et b tels que $f'' + af' + bf = 0$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Tout extremum intérieur est un point critique et théorème de Rolle.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} (a+2)x + 2y + 3z = 0 \\ 6x + (a+1)y + 6z = 0 \\ -4x - 2y + (a-5)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Exercice 3 : Soit $g : x \longmapsto \sin^2 x$.

Déterminer une relation entre f'' et f.

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Égalité des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} (a-1)x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + (a+7)y - 9z = 0 \\ -x + 2y + (a-4)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 3 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & e^x \cos x \end{array}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Formule de Leibnitz.*

Exercice 1 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y, z) où m est un paramètre réel.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \text{Inf}\{|y - x|,\ y \in \text{A}\}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto x^2(1+x)^n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.*

Exercice 1 : Résoudre

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & \operatorname{ch}(ay) & + & \operatorname{ch}(2az) & = & \operatorname{ch}(3a) \\ \operatorname{ch}(ax) & + & \operatorname{ch}(2ay) & + & \operatorname{ch}(3az) & = & \operatorname{ch}(4a) \\ \operatorname{ch}(2ax) & + & \operatorname{ch}(3ay) & + & \operatorname{ch}(4az) & = & \operatorname{ch}(5a) \end{array} \right.$$

Exercice 2 : Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en chacun de ses points.

Exercice 3 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!$.