Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Image d'un intervalle par une fonction continue.*

Exercice 1 : Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + 2z & = & m \\ x + y - z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (x^3+x-2)^4$
2. $x \longmapsto \tan^3 x$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Théorème des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+my & = & -3 \\ mx+4y & = & 6 \end{array}\right.$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 2 : Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
2. $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Tout extremum intérieur est un point critique et théorème de Rolle.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction : Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0,0,0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x = y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait maintenant $\mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 + 3\mathrm{L}_2$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z = 0$, puis en remontant $y = 0$, puis $x = 0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0,0,0)$.

Exercice 2 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in \mathrm{I}$, $f(x)^2 = 1$.

Montrer que $f \equiv 1$ ou $f \equiv -1$.

Correction : Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$.

Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1.

Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$.

Montrons que f est constante égale à $+1$.

S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I.

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$.
Donc f est constante égale à $+1$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

2. $x \longmapsto \pi^{x^2-1}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Égalité des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Correction : On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

Exercice 2 : Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leqslant 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1], f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto x^2\sqrt{x}$
2. $x \longmapsto \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Formule de Leibnitz.*

Exercice 1 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Correction : On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & 7y & + & z & = & 3c-a \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{array}\right.$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \dfrac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ puis en remontant cela donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1}{18}(8a+5b-c) \\ y & = & \dfrac{1}{18}(-2a+b+7c) \\ z & = & \dfrac{1}{18}(-4a-7b+5c) \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, non constante, telle que $f(a) = f(b)$.
On note $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\mathrm{M} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Montrer que tout $\alpha \in]m, \mathrm{M}[$ admet au moins deux antécédents par f dans $[a,b]$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1 $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

2 $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.*

Exercice 1 : Trouver les solutions de

$$\begin{cases} 3x+2z=0 \\ 3y+z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{cases}$$

Correction : On commence par simplifier le système :

- on place la ligne L_3 en première position pour le pivot de Gauss;
- on réordonne les variables dans l'ordre : y, t, x, z pour profiter des lignes déjà simples.

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3y + 3t + z = 0 \\ -y - t + 2x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

On commence le pivot de Gauss avec les opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour obtenir :

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ -3x - 2z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Les 3 dernières lignes sont identiques, on se ramène donc à un système avec 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Nous choisissons x et y comme paramètres, alors $z = -\frac{3}{2}x$ et $t = -x-y-z = \frac{1}{2}x - y$. Les solutions du système sont donc les

$$\left\{(x, y, z = -\frac{3}{2}x, t = \frac{1}{2}x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 2 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
Montrer que f est bornée et que f atteint ses bornes.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$
2. $x \longmapsto x^{x^x}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Image d'un intervalle par une fonction continue.*

Exercice 1 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y, z) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à $]-\infty, -a]$ ou à $[a, +\infty[$, on a :
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{a^2}|x - y|.$$
2. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x - x_0| < \alpha \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon.$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{2x^3 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}}$
2. $x \longmapsto (1 + x^4)^{1-2x}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Théorème des accroissements finis.*

Exercice 1 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \\ a^3x + b^3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Pour tout n entier naturel et tout couple de réels (x, y), établir la formule :

$$x^n - y^n = (x - y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

2. Déduire de la question précédente que pour tout entier n tout réel strictement positif a et tout couple de réels (x, y) tel que $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant a$,

$$|x^n - y^n| \leqslant na^{n-1}|x - y|.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \;\Rightarrow\; |x^n - x_0^n| < \epsilon.$$

Conclure quant à la continuité de $x \longmapsto x^n$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$
2. $x \longmapsto \ln\sqrt{1 + x^2}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Tout extremum intérieur est un point critique et théorème de Rolle.*

Exercice 1 : Résoudre $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x+2y+z-2t=0 \\ 3x+2z-t=4 \end{cases}$

Exercice 2 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2x+|x|}$.

Déterminer le domaine de définition de f.

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Correction : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

- $\forall\, x > 0, f(x) = \dfrac{x}{2x+x} = \dfrac{1}{3}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{3}$.
- $\forall\, x < 0, f(x) = \dfrac{x}{2x-x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

Par conséquent, f n'admet pas de limite en 0. Elle n'est pas prolongeable par continuité.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$
2. $x \longmapsto x^{x^2}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Égalité des accroissements finis.*

Exercice 1 : Un cycliste va d'une ville A à une ville B. Le parcours compte x kilomètres de montée, y kilomètres de plat et z kilomètres de descente. Il roule à 15 km/h en montée, 20km/h sur le plat et 30km/h en descente. Il met deux heures à effectuer le trajet aller et trois heures pour le retour.

1. Mettre le problème en équations.
2. Un autre cycliste qui roule respectivement à 20, et 30 et 40 km/h sur chaque type de route, effectue l'aller-retour en un temps total de trois heures quarante minutes. Déduire une équation supplémentaire.
3. Déterminer les valeurs de x, y et z.
4. Sachant que les montées et descentes ont toutes une même pente de 5%, déterminer la différence d'altitude des deux villes, ainsi que celle qui est située le plus haut.

Correction : $\begin{cases} 4x+3y+2z=120 \\ 2x+3y+4z=180 \\ 9x+8y+9z=440 \end{cases}$ Donc $\boxed{x=5,\ y=10 \text{ et } z=35.}$

A est située 1500 m au-dessus de B.

Exercice 2 :

1. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue.

   Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=x$.
2. Soient $f,g:[0,1]\to[0,1]$ continues telles que $f\circ g=g\circ f$.

   Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Correction :

1. $f(x)-x$ change de signe entre 0 et 1.
2. Sinon $f-g$ est de signe constant, par exemple positif.

   Si a est le plus grand point fixe de f alors $g(a)>a$ et $g(a)$ est aussi point fixe de f, absurde.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1 $x \longmapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$

2 $x \longmapsto x^x$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Formule de Leibnitz.*

Exercice 1 : Déterminer selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le rang du système suivant :

$$\begin{cases} (2-m)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (5-m)y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + (5-m)z = 0 \end{cases}$$

Correction :

- $m = 1$: rang 1
- $m = 10$: rang 2
- Sinon, rang 3

Exercice 2 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

Montrer que la fonction $g(t) = f\left(t + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $\left[a\,; \dfrac{a+b}{2}\right]$.

Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure.

Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Correction :

1. $g(a) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - f(a)$ et $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f(b) - f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

   Comme $f(a) = f(b)$ alors nous obtenons que $g(a) = -g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

   Donc ou bien $g(a) \leqslant 0$ et $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant 0$ ou bien $g(a) \geqslant 0$ et $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\dfrac{a+b}{2}$.

2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t.

   Nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue.

   Soit $f(t) = d(t) - 4t$. Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$.

   Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$:

   Il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.

   Donc $d(c + \frac{1}{2}) - d(c) = 4(c + \frac{1}{2}) - 4c = 2$.

Donc entre c et $c+\frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{x^2+x+1}}$

2. $x \longmapsto \sqrt{x^2+6x-1}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant selon le paramètre a :

$$\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-y+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{cases}$$

Correction :

- Si $a=1$, $\mathcal{S}=\emptyset$
- Sinon, $\mathcal{S}=\left\{\left(\dfrac{3a-4}{2(a-1)}, \dfrac{5a-8}{2(a-1)}, \dfrac{a-2}{a-1}\right)\right\}$

Exercice 2 : Soit a, b deux réels tels que $a<b$.

On considère une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$.

Montrer que si $f([a,b])$ est fini, alors f est constante.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (x^3+x-2)^4$
2. $x \longmapsto \tan^3 x$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Image d'un intervalle par une fonction continue.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Correction :

- Si $a = 2$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$
- Sinon, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}$

Exercice 2 :

1. Rappeler que pour tout nombre réels $\epsilon > 0$ il existe un entier n tel que :

$$\frac{1}{2n\pi} < \epsilon \qquad \textit{et} \qquad \frac{1}{(2n+1)\pi} < \epsilon.$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ tel que :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - l\right| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

2. $x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Théorème des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ -2x + 3y + z - 4t = 1 \\ -3x + 5y + 4z - 7t = a \\ -x + 2y + 3z - 3t = b \end{cases}$$

Correction :

- Si $(a, b) \neq (2, 1)$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $(a, b) = (2, 1)$, $\mathcal{S} = \{(1 - 3z + 3t, 1 - 5z + 2t, z, t), z, t \in \mathbb{R})\}$.

Exercice 2 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in \mathrm{I}$. Montrer que :

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$

2. On suppose que f et g sont continues sur I.

   Montrer que la fonction $\sup(f, g)$ définie $\sup(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ par est continue sur I.

Correction :

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire).

   Donc pour tout $x \in \mathrm{I}$:$||f(x)| - |f(a)|| \leqslant |f(x) - f(a)|$.

   L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f + g$ et $f - g$ sont continues sur I.

   L'implication de 1. prouve alors que $|f - g|$ est continue sur I, et finalement on peut conclure :

   La fonction $\sup(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ est continue sur I.

Exercice 3 : Soit $f : x \longmapsto 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$.
Déterminer deux réels a et b tels que $f'' + af' + bf = 0$.

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Tout extremum intérieur est un point critique et théorème de Rolle.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} (a+2)x + 2y + 3z = 0 \\ 6x + (a+1)y + 6z = 0 \\ -4x - 2y + (a-5)z = 0 \end{cases}$$

Correction :

- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = \{(-z, -z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \{(-z, 0, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = 2$, $\mathcal{S} = \{(-2y, y, 0), z \in \mathbb{R})\}$.
- Sinon $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0))\}$.

Exercice 2 : Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Correction : Soit T une période strictement positive de f. On note ℓ la limite de f en $+\infty$.

Soit x un réel. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x + n\mathrm{T})$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x + n\mathrm{T}) = \ell.$$

Ainsi, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$ et donc, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit $g : x \longmapsto \sin^2 x$.

Déterminer une relation entre f'' et f.

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Égalité des accroissements finis.*

Exercice 1 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} (a-1)x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + (a+7)y - 9z = 0 \\ -x + 2y + (a-4)z = 0 \end{cases}$$

Correction :

- Si $a = -3$, $\mathcal{S} = \{(-z, 3z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = \{(-z, 2z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = 2$, $\mathcal{S} = \{(0, z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Sinon $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0))\}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Correction : Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \quad x > \mathrm{A} \Rightarrow \ell - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \epsilon.$$

Fixons $\epsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > \mathrm{A}$, $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$.

Nous venons de montrer que f est bornée « à l'infini ».

La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \mathrm{A}]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe m, M tels que pour tout $x \in [0, \mathrm{A}]$, $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$.

En prenant $\mathrm{M}' = \max(\mathrm{M}, \ell + 1)$, et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m' \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}'$.

Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 3 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & e^x \cos x \end{array}$.

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Formule de Leibniz.*

Exercice 1 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y, z) où m est un paramètre réel.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \operatorname{Inf}\{|y - x|,\ y \in \mathrm{A}\}$.

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathrm{A}$. $|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$.

Or, $\forall z \in \mathrm{A},\ |x - z| \geqslant d(x, \mathrm{A})$ et donc $d(x, \mathrm{A}) - |x - y|$ est un minorant de $\{|y - z|,\ z \in \mathrm{A}\}$.

Par suite, $d(x, \mathrm{A}) - |x - y| \leqslant d(y, \mathrm{A})$.

On a montré que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A}) \leqslant |y - x|.$$

En échangeant les rôles de x et y, on a aussi montré que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(y, \mathrm{A}) - d(x, \mathrm{A}) \leqslant |y - x|$.

Finalement, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(y) - f(x)| \leqslant |y - x|$.

Ainsi, f est donc 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto x^2(1 + x)^n$.

Systèmes, Continuité et Dérivabilité

Question de cours : *Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.*

Exercice 1 : Résoudre

$$S_1 : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & \text{ch}\,(ay) & + & \text{ch}\,(2az) & = & \text{ch}\,(3a) \\ \text{ch}\,(ax) & + & \text{ch}\,(2ay) & + & \text{ch}\,(3az) & = & \text{ch}\,(4a) \\ \text{ch}\,(2ax) & + & \text{ch}\,(3ay) & + & \text{ch}\,(4az) & = & \text{ch}\,(5a) \end{array}\right.$$

Correction : S_1 : si $a \neq 0$, le système est équivalent à $y = -1 - 2\text{ch}\,a\ x$ et $z = x + 2\text{ch}\,a$
si $a = 0$, il est équivalent à $x + y + z = 1$.

Exercice 2 : Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en chacun de ses points.

Correction : Soit χ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

Soit x_0 un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{1}{n})$ existe, $\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{\pi}{n})$ existe avec

$$\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{1}{n}) \neq \lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{\pi}{n}),$$

bien que $\lim_{n\to+\infty} x_0 + \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} x_0 + \frac{\pi}{n} = x_0$.

Ainsi, pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite en x_0 et est donc discontinue en x_0.

Exercice 3 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!$.