Étude de fonctons

1 La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant définie sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathrm{D} = \mathbb{R}_+.}$

2 (a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ l'est sur $\mathbb{R}$ (exponentielle d'un polynôme), donc par produit, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathrm{D}' = \mathbb{R}_+^*.}$ Calculons sa dérivée :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{x}\Big(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\Big) \boxed{= \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}.}$$

(b) Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$, la fonction f ne peut être dérivable en 0 et elle n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3 (a) En multipliant l'expression précédente par $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{(1-x)\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2x} \boxed{= \frac{1-x}{2x} f(x).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-x$ (fonction affine). On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

La limite en $+\infty$ provient des croissances comparées, car $f(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4 D'après la question précédente, f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ et y est continue (produit de la racine carrée par l'exponentielle d'un polynôme). Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, le théorème de la bijection montre que $\boxed{f \text{ établit une bijection de } [0\,;1] \text{ dans } [0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}].}$ (De plus, la bijection réciproque g est continue sur $[0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}]$).

5 Appliquons le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque :

1. f est dérivable sur $]0\,;1]$;
2. f établit une bijection de $]0\,;1]$ dans $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$ (application directe du théorème de la bijection sur $]0\,;1]$),

donc on peut affirmer que g est dérivable sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$ privé des points $f(x)$ où $x \in\ ]0\,;1]$ vérifie $f'(x) = 0$. D'après l'étude des variations, seul $x = 1$ annule la dérivée, donc on exclut $f(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. Finalement, $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in\ ]0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} &= \frac{1}{\frac{1-g(x)}{2g(x)} f(g(x))} && \text{(d'après (2b))} \\ &\boxed{= \frac{2g(x)}{(1-g(x))x}} && \text{(car } f(g(x)) = x\text{).} \end{aligned}$$

6 On rappelle que $g(\alpha)$ est l'unique solution dans $[0\,;1]$ de l'équation $f(x)=\alpha$:

$$f(x)=\alpha \iff \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \iff \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\sqrt{\ln 2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}} \iff \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\sqrt{\ln 2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}}.$$

On voit donc que $x=\ln 2$ convient car $\ln 2\in[0\,;1]$ (et c'est la seule solution, car f est bijective de $[0\,;1]$ dans $[0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}]$). Sachant que $\boxed{g(\alpha)=\ln 2,}$ on obtient :

$$g'(\alpha)=\frac{2g(\alpha)}{\alpha(1-g(\alpha))}=\frac{2\ln 2}{\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}(1-\ln 2)}\boxed{=\frac{2\sqrt{2\ln 2}}{1-\ln 2}.}$$

7 Si $x\geqslant 1$, alors $f(x)\in\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$ (d'après (3)) donc $\boxed{g(f(x))\text{ existe}}$ car $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$ est inclus dans le domaine de définition de g.

ATTENTION On ne peut pas affirmer que $g(f(x))=x$, car ici x n'appartient pas à $[0\,;1]$ (intervalle à partir duquel on avait défini la fonction g).

8 La fonction f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$ et à valeurs dans $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$. Comme g est strictement croissante sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$, on en déduit que $\boxed{\varphi\text{ est strictement décroissante sur }[1\,;+\infty[}$ par composition.

9 On sait que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et à valeurs dans $]0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[$ (d'après (3)). Comme g est dérivable sur $]0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[$, alors par composition, $\boxed{\varphi\text{ est dérivable sur }]1\,;+\infty[.}$ Appliquons la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\forall\ x\geqslant 1,\quad \varphi'(x)=f'(x)\,g'(f(x))=\frac{1-x}{2x}f(x)\cdot\frac{2g(f(x))}{f(x)(1-g(f(x)))}\boxed{=\frac{(1-x)\varphi(x)}{x(1-\varphi(x))}.}$$

10 Soit $x>1$. On a $\varphi(x)=g(f(x))\in\ ]0\,;1[$ (car $f(x)\in\ ]0;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[$), donc $\varphi(x)>0$ et $1-\varphi(x)>0$. Ainsi, $\varphi'(x)$ est du signe de $1-x$, c'est-à-dire $\varphi'(x)<0$. On retrouve donc la $\boxed{\text{stricte décroissance de }\varphi\text{ sur }]1\,;+\infty[.}$