XIX

Suites récurrentes

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».
Mais elles se font refouler à l'entrée... [1]

Contenu

I Suites adjacentes

Définition I (Suites adjacentes) : Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Deux telles suites ne peuvent avoir un comportement quelconque.

[1]. Un peu d'humour qui se mérite. Vous comprendrez dans ce chapitre.

I.1 Théorème des suites adjacentes

Montrons tout d'abord un résultat liminaire :

Lemme 1 : Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ remplissant les conditions de la définition (1) .

Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $p \geqslant n_0$ tel que $u_p > v_p$ i.e. il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_p - v_p > \mathrm{A}$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pour tout entier supérieur ou égal à p, on aura alors $u_n - v_n \geqslant u_p - v_p > \mathrm{A}$.

Choisissant un réel strictement positif $\varepsilon < \mathrm{A}$, l'intervalle $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$ centré en 0 ne contiendra pas les termes de la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \geqslant p$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

Théorème 1 : Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite. [2]

Preuve :

- Montrons tout d'abord que les deux suites sont convergentes.

  Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par exemple. Celle-ci étant croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

  D'après le lemme (1) , il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n$.

  Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall\, n \geqslant p$, $v_n \leqslant v_p$ qui entraîne

  $$\forall\, n \geqslant p, \; u_n \leqslant v_p.$$

  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée (à partir d'un certain rang).

  D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers une limite ℓ.

  On montre de même que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ'.
- Enfin l'assertion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \iff \ell - \ell' = 0$ entraîne que les deux suites convergent vers la même limite.

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

Le théorème (1) a de nombreuses applications. La proposition (2) et la proposition (3) en sont deux importantes :

[2]. Pas de soirée « *no limit* » pour nos suites adjacentes !

Exercice 1 : Montrer que les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

En déduire que $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

I.2 Approximation décimale

Proposition 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Le décimal a_n est appelé *approximation décimale par défaut* de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n *approximation décimale par excès* de x à 10^{-n} près.

Preuve : Par définition des parties entières, on a :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1,$$

En particulier, on a déjà $a_n \leqslant x < b_n$.

En multipliant les inégalités par 10, on a aussi

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10. \tag{XIX.1}$$

- $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ étant le plus grand entier inférieur à $10^{n+1}x$, l'inégalité de gauche donne :

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x \implies a_n \leqslant a_{n+1}.$$

- Par définition de $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ et d'après l'inégalité de droite de (XIX.1), on a aussi

$$\begin{aligned} \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x &\implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10 \implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 11 \\ &\implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leqslant 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10 \implies b_{n+1} \leqslant b_n. \end{aligned}$$

On a finalement obtenu la suite d'inégalités

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant x < b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Autrement dit, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

De plus, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$.

Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.

Les encadrement donnés plus haut indiquent que cette limite commune est nécessairement inférieure ou égale à x puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par x, mais également supérieure ou égale à x puisque $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par x.

Elle est donc nécessairement égale à x.

Exemple 1 : Si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3,141$ et $b_3 = 3,142$.

I.3 Dichotomie

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) : Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La proposition (3) peut être vue comme une démonstration séquentielle du théorème de Bolzano.

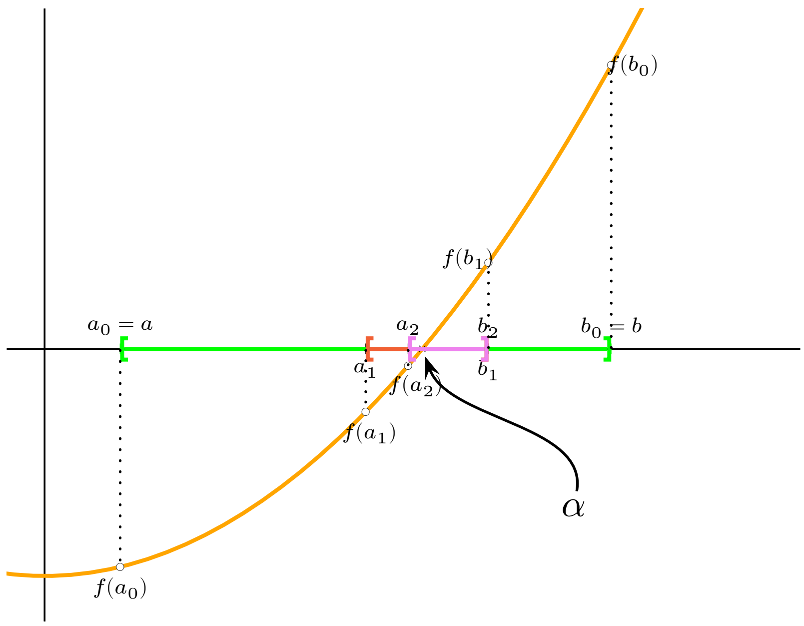


Figure XIX.1 – Méthode par dichotomie

Preuve : Cette propriété est une conséquence du théorème (1). Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante par construction. Afin de montrer qu'elles sont adjacentes, il reste à prouver que leur différence $b_n - a_n$ tend vers 0, ce qui découle de l'affirmation :

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

```python
def dichotomie (f,a,b,epsilon): # f continue et f(a)*f (t) <=0
                                # avec a<b
        while b-a >= epsilon:
                milieu = (a+i)/2
                if f(a)*f(milieu) <= 0: # f s'annule dans la
                                        # première moitié
                        b = milieu
                else :
                        a = milieu      # f s'annule dans la
                                        # deuxième moitié
        return (a+i)/2.
```

Figure XIX.2 – Dichotomie en *Python*

Prouvons celle-ci par récurrence.

- Au rang 0, on a $b_0 - a_0 = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$. La propriété est vraie.
- Supposons la vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, suivant les cas :
  - $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$
  - ou $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$

  Dans les deux cas, en exploitant l'hypothèse de récurrence,
  $$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$
  La propriété est vraie au rang $n+1$.

Les deux suites sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite α.

Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$.

Par construction, on aura toujours $f(a_n) \geqslant 0$ donc, la fonction étant continue, par passage à la limite, $f(\alpha) \geqslant 0$.

De même, $f(b_n) \leqslant 0$ qui implique $f(\alpha) \leqslant 0$.

On conclut alors que $f(\alpha) = 0$.

Remarque : a_n est une valeur approchée de α par défaut à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près, b_n est une valeur approchée par excès.

Exemple 2 : On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par
$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.

La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0,375$ à $0,125$ près.

On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée.

Remarque : Pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{\ln\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \leqslant n$$

II Suites récurrentes

Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f, et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

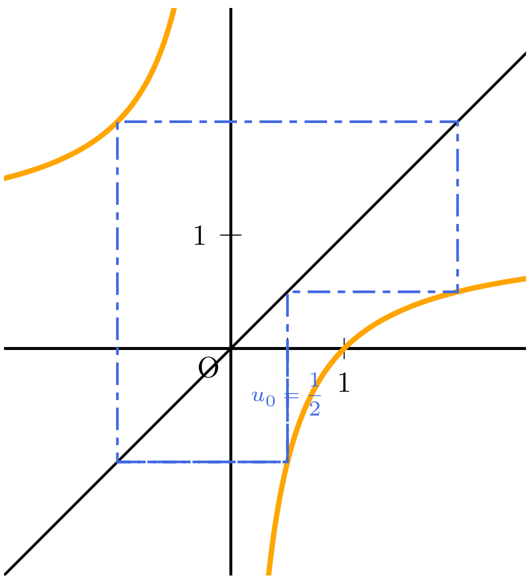


Figure XIX.3 – $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

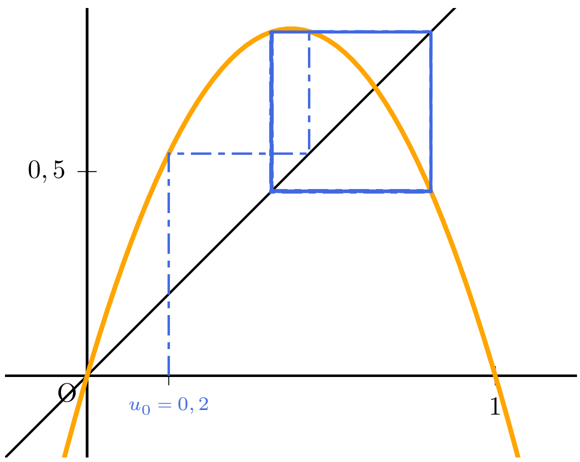


Figure XIX.4 – $u_{n+1} = 3,4u_n(1-u_n)$ avec $u_0 = 0,2$.

Figure XIX.5 – Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un cycle.

Notons par exemple f la fonction $x \longmapsto 2 + \sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty\,;2]$ et posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme $u_0 \in]-\infty\,;2]$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) = 3$, mais ensuite ???? Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ici pas définie.

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky [3] sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne

[3]. Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky est un éminent mathématicien ukrainien célèbre pour le développement du théorème de Sharkovsky sur les périodicités des systèmes dynamiques discrets en **1964**.

parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0\,;1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1-u_n)u_n,\ \mu \in [0\,;1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?

Dans tout cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

II.1 Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode I (Représentation d'une suite) :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \longmapsto x$.
- On place le point $(u_0\,;0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de $\mathscr{C}_f$.
- On reporte le $(u_1\,;0)$ à l'aide la bissectrice.
- On itère le procédé ...

II.2 Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (II) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$
3. $u_0 \in \mathrm{I}$

Un tel intervalle est appelé *intervalle de stabilité.*

Remarque : Trouver un segment $[a\,;b]$ sera notre saint graal.

Le théorème de Sharkovsky est un théorème portant sur l'itération des fonctions continues.

Il donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f, c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Ce théorème fait partie des premiers exemples remarquables de la *théorie des systèmes dynamiques*, introduisant la notion de *chaos*. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-*cycle implique chaos*

Il faut comprendre par là que toute fonction continue présentant un cycle de période 3 admet un cycle de période n pour tout entier n.

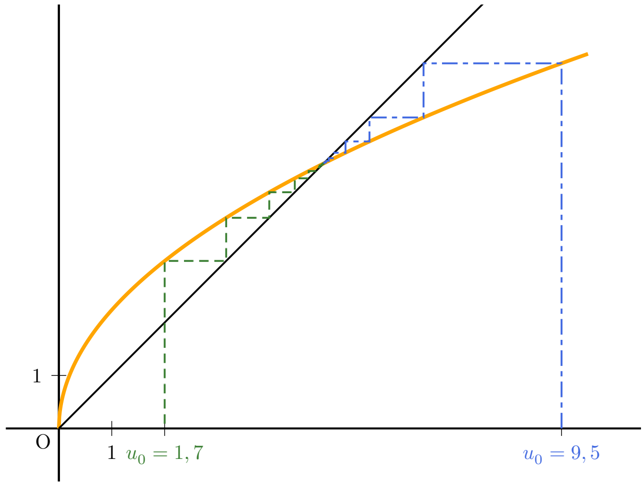


Figure XIX.6 – $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 2$ et $u_0 = 9,5$.

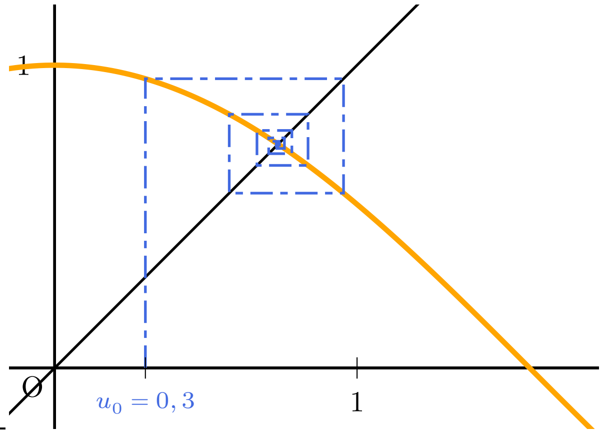


Figure XIX.7 – $u_{n+1} = \cos(u_n)$ avec $u_0 = 0,3$.

Figure XIX.8 – Exemples de suites convergentes

Définition 2 (Intervalle stable) : On dit que l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ est *stable* par f si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :
- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f, d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Proposition 4 (Existence de la suite) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f.

Si $u_0 \in \mathrm{I}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$.

Preuve : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n \text{ est bien définie et } u_n \in \mathrm{I} \text{ »}$$

- On a $u_0 \in \mathrm{I}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons la propriété vraie au rang n.

  On a par hypothèse de récurrence $u_n \in \mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

  De plus, comme I est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. D'où la propriété au rang $n+1$ et l'hérédité.

On conclut par principe de récurrence.

ATTENTION Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 3 : On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où, $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	0	8	$+\infty$
f	0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[0\,;8]$, $[-1\,;8]$, $[0\,;+\infty[$ ou $[-1\,;+\infty[$ mais pas $[-1\,;0]$ ou $[8\,;+\infty]$.

II.3 Variations

Pour déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il s'agira de déterminer le signe de $f(x) - x$ sur I, et de dresser éventuellement son tableau de signe.

Graphiquement, cela correspond à déterminer la position de la courbe de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Proposition 5 : Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on considère le nombre $\delta(x) = f(x) - x$.

1. Si, $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $\delta(x) \geqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si, $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $\delta(x) \leqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple 4 : Reprenons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l' exemple (3) .

On a $\delta(x) = \sqrt{1+x} - x = \dfrac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x} = \dfrac{\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1+x}+x}$.

x	0		$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$		8
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Comme on a choisi $\mathrm{I} = [0\,;8]$, la quantité $\delta(x)$ n'est pas de signe constant sur I. On ne peut pas utiliser cette propriété.

On aurait pu si on avait opté pour les intervalles de stabilité $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;8\right]$ ou $\left[0\,;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ plutôt que $[0\,;8]$.

Proposition 6 (Lien avec les fonctions monotones) : Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
  - Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Globalement, l'idée vient de la définition d'une fonction croissante :

« f est croissante si, et seulement si elle conserve l'ordre ».

Si, par exemple, $u_0 > u_1$ alors $f(u_0) > f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 > u_2$ puis $u_2 = f(u_1) > u_3 = f(u_2)$, ...$u_n = f(u_{n-1}) > u_{n+1} = f(u_n)$, ...et ainsi de suite pour tous les termes de la suite.
La suite est donc décroissante dans ce cas.

Preuve :

– Considérons une fonction quelconque f croissante sur son intervalle de définition et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que ses deux premiers termes soient, par exemple,

$$u_0 \leqslant u_1. \tag{XIX.2}$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Posons donc la propriété $\mathcal{P}_n \ : \ u_n \leqslant u_{n+1}$.

Initialisation : D'après (XIX.2), $u_0 \leqslant u_1$ et $\mathcal{P}_0$ est réalisée.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour un certain entier $k > 0$ et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse.

$u_k \leqslant u_{k+1}$	Hypothèse de récurrence	$\mathcal{P}_k$
$f(u_k) \leqslant f(u_{k+1})$	f est croissante donc conserve l'ordre	$\Downarrow$
$u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$	Définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}_{k+1}$

La propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée. On a prouvé l'hérédité de la propriété.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

La démonstration est analogue pour une suite telle que $u_0 \geqslant u_1$ qui serait décroissante.

– Dans le cas d'une fonction décroissante, posons $g = f \circ f$. Cette application est croissante sur I.
Posons alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les deux suites vérifient

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(v_n) \quad \text{et, de même,} \quad w_{n+1} = g(w_n).$$

Le point précédent permet alors d'en déduire que chacune des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Supposons, par exemple, que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.
En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit :

$$f(v_n) \geqslant f(v_{n+1}) \iff w_n \geqslant w_{n+1}.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
Si l'on supposait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante, on en déduirait de la même manière que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En conclusion, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

ATTENTION

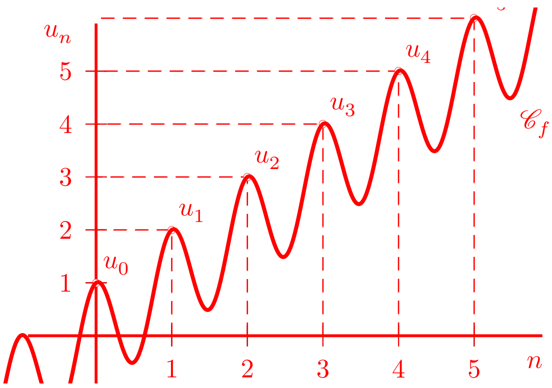
Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

f(dé)croissante $\cancel{\Longrightarrow}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \\ &= u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n+1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, f ne l'est pas le moins du monde.



Exemple 5 : Reprenons encore l' exemple (3) .
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0\,;8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Comme de plus $v_0 = 8$ et $v_1 = 3$, on en conclut que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Comme par ailleurs elle est minorée par 0, on peut en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Méthode 2 (Suite récurrente associée à une fonction décroissante) :
Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \longmapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:
   - si $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
   - si $g(u_1) - u_1 \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$), $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

ATTENTION

Dans le cas où $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.

II.4 Convergence et point fixe

Rappel I (Point fixe) : Soit une fonction f définie sur un ensemble I.

On appelle *point fixe* de f sur I tout réel $x \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Proposition 7 (Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge) : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur I} \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in \mathrm{I} \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger.

Preuve : Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel ℓ.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$.

Or, la fonction f est continue en $\ell \in \mathrm{I}$ i.e. $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Donc $f(\ell) = \ell$ i.e. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f, on étudie les points d'annulation de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ sur I.

ATTENTION

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

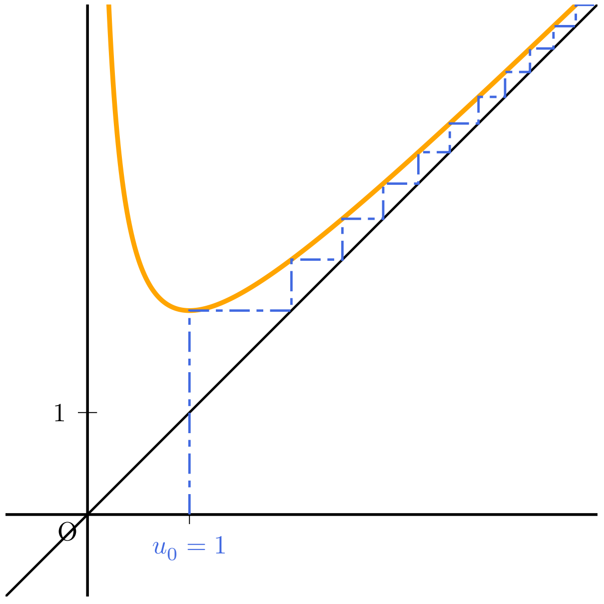


Figure XIX.9 – $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.
f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

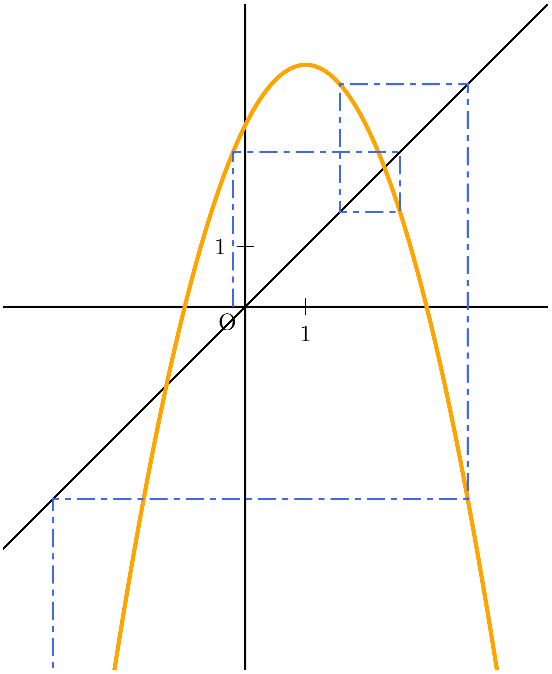


Figure XIX.10 – $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0,2$.
f a deux points fixes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Figure XIX.11 – Exemples de suites divergentes

ATTENTION

Si f n'est pas continue, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément vers un point fixe de f.

Contre-Exemple 6 : Soient $f : \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \end{cases} \end{array}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f.

Exemple 7 : Revenons à l' exemple (3) .

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0\,;8]$.

Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{1+\ell} = \ell$.

D'où $1 + \ell = \ell^2$ et $\ell \geqslant 0$. Finalement, on obtient $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent :

— Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g. Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.

La réciproque est fausse : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f.

Contre-Exemple 8 : La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

— Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y converge aussi. À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Reste alors à se poser la question de quelle(s) propriété(s) rajouter à f ou à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour imposer la convergence voire le choix du point fixe donc se poser la question de son unicité.

Une partie de la réponse se trouve dans les paragraphes suivants.

Définition 3 (Fonction contractante) : Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est *contractante sur* I si f est k-lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est dérivable sur I et telle que $|f'| \leqslant k < 1$ sur I alors f y est contractante.

Théorème 8 (Théorème du point fixe) : (Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f.

Alors, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n \, |u_0 - \ell| \,. \tag{XIX.3}$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (XIX.3).

Calcul approché du point fixe : Le terme u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $k^n|u_0 - \ell|$. La méthode sera d'autant plus efficace que l'on aura bien choisi u_0.

Preuve : Il y a beaucoup de choses à démontrer dans ce théorème.

Existence du point fixe : La fonction est lipschitzienne sur I donc continue.

Posons $\phi : x \longmapsto f(x) - x$ et $\mathrm{I} = [a\,;b]$ où $a < b$ sont deux réels.

La fonction ϕ est continue sur I et l'hypothèse $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ entraîne $\phi(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $\phi(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\ell \in \mathrm{I}$ tel que :

$$\phi(\ell) = 0 \iff f(\ell) = \ell.$$

La fonction f possède donc un point fixe ℓ sur I.

Unicité du point fixe : Montrons, par l'absurde, que ℓ est unique.

Supposons donc avoir un deuxième point fixe $\ell_1 \neq \ell \in \mathrm{I}$.

Alors $|f(\ell) - f(\ell_1)| < k|\ell - \ell_1| \iff |\ell - \ell_1| < k|\ell - \ell_1|$ qui est absurde avec $k < 1$.

Donc, f admet un unique point fixe ℓ sur I.

Convergence de la suite : Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, par récurrence, par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Par construction, on a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.

Par récurrence, on montre facilement que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.

Comme $k \in]0\,;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = \lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$.

$$\text{Donc, } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

ATTENTION

Bien remarquer que la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. une **hypothèse** dans la proposition (7) .
2. une **conclusion** dans le théorème (8).

Exercice 3 : Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{5 + 2u_n} \end{cases}$.

II.5 Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{J} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

— Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
— S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

(a) I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la proposition (4) .

(b) I est un segment $[a\,;b]$ *i.e.* fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.

2 Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la proposition (5) .

On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

3 I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de f. C'est le contenu de la proposition (7) et du théorème (8).

S'il n'en contient pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4 (a) Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (8) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION
- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

(b) Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0.

ATTENTION
- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !

Exemples : $f(x) = x^2$ n'est pas contractante sur $[0\,;1]$, elle a plusieurs points fixes (deux), et les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont décroissantes.

(c) Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas **4** .(a).

ATTENTION
- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

i. Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii. S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

◇ les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

◇ les sous-suites convergent vers deux points fixes différents : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

(d) Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu ... faire preuve de jugeotte et d'initiative ... Étudier le signe de $f(x)-x$, ...L'énoncé vous aidera !

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0;1] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 .
4. Supposons maintenant $a < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

III Suites récurrentes linéaires

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n,$$

où a_0, a_1, ... a_{p-1} sont p scalaires fixés de K, a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques.

Exemple 9 : Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1}u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{U}_n$ mais dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n......

Vous étudierez ces suites, liées à la réduction des endomorphismes, plus en détail l'année prochaine.

Même si, toutes les suites récurrentes linéaires d'ordre $p > 1$ peuvent se ramener aux précédentes via le calcul matriciel, celles-ci peuvent aussi s'étudier de manière directe. C'est le cadre de ce dernier paragraphe.

L'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur se ramène à un problème d'algèbre linéaire. L'expression du terme général d'une telle suite est possible pour peu qu'on soit capable de factoriser un polynôme qui lui est associé, appelé *polynôme caractéristique*.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i \mathrm{X}^i = \mathrm{X}^p - a_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} - a_{p-2}\mathrm{X}^{p-2} - \cdots - a_1\mathrm{X} - a_0.$$

Son degré est ainsi égal à l'ordre de la relation de récurrence.

En particulier, dans le cas des suites d'ordre 2, le polynôme est de degré 2 et peut donc être factorisé à l'aide d'un calcul de discriminant. Ainsi, le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 peut être exprimé en utilisant seulement les deux premiers termes, quelques valeurs constantes, quelques opérations élémentaires de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, exponentielle) et les fonctions sinus et cosinus (si le corps des scalaires est le corps des réels).

Une des suites de ce type est la célèbre suite de Fibonacci, qui peut s'exprimer à partir de puissances faisant intervenir le nombre d'or.

Définition 4 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) : On appelle *récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad (a\,;b) \in \mathbb{K}^2. \tag{XIX.4}$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

Définition 5 (Équation caractéristique) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (XIX.4).

On appelle *équation caractéristique* associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

III.1 Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 9 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

Remarque : L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

Preuve :

1. *Supposons d'abord que l'équation admette deux solutions $r_1 \neq r_2$.*

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

On cherche $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$.

Comme $r_1 \neq r_2$, ce système admet une unique solution

$$(\lambda\,;\mu) = \left(\frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}\,;\frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}\right).$$

Si λ et μ conviennent, alors leur valeur est donnée par la résolution de ce système et donc le couple $(\lambda\,;\mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par une récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de $(\lambda\,;\mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}. \end{aligned}$$

car $r_1^2 = a r_1 + b$ et $r_2^2 = a r_2 + b$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2 Supposons maintenant que l'équation admette une solution double $r \neq 0$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r + \mu r = u_1 \end{cases}$.

Le déterminant de ce système est $r \neq 0$, donc il admet une unique solution

$$(\lambda\,;\mu) = \left(u_0\,;\frac{u_1 - r u_0}{r}\right).$$

S'il existe, le couple $(\lambda\,;\mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

Par définition de $(\lambda\,;\mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et $u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ &= \lambda r^n(ar+b) + \mu n r^n(ar+b) + \mu r^{n+1} a \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu(n+2)r^{n+2} \text{ car } r^2 = ar+b \text{ et } r = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
En conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

III.2 Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose ici que $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une suite à valeurs réelles.

Théorème 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors
$$\exists!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$
2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors
$$\exists!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$
3. Si $\Delta < 0$ et $r\,\mathrm{e}^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors
$$\exists!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \Big(\lambda\cos(\omega n) + \mu\sin(\omega n)\Big) r^n.$$

Preuve : Les deux premiers cas s'obtiennent comme dans le cas complexe. Les scalaires $(\lambda\,;\mu)$ déterminés en résolvant les systèmes introduits dans la preuve seront cette fois réels.

3. Supposons que l'équation admette deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\omega}$ et $r_2 = \overline{r_1}$.
D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe $(\mathrm{A}\,;\mathrm{B}) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{A} r^n\,\mathrm{e}^{i n\omega} + \mathrm{B} r^n\,\mathrm{e}^{-i n\omega}$.
Montrons que $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}}$: On sait que :

$$\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = u_0 \\ \mathrm{A} r_1 + \mathrm{B}\overline{r_1} = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{u_1 - \overline{r_1} u_0}{r_1 - \overline{r_1}} \\ \mathrm{B} = \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{\overline{r_1} - r_1} = \overline{\mathrm{A}}. \end{cases} \qquad (r_1 \neq \overline{r_1} \text{ car } r_1 \notin \mathbb{R})$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{A} r^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega} + \overline{\mathrm{A}} r^n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega} \\ &= r^n \times 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega}\right) \\ &= r^n \Big(2\mathrm{Re}\left(\mathrm{A}\right)\cos(n\omega) - 2\mathrm{Im}\left(\mathrm{A}\right)\sin(n\omega)\Big) \\ &= r^n \Big(\lambda\cos(n\omega) + \mu\sin(n\omega)\Big). \end{aligned}$$

Exemple 10 (Suite de Fibonacci [4]) : Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire $\mathrm{F}_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$ puis, avec les conditions initiales qui imposent $\lambda = -\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$:

$$\mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right).$$

Exercice 5 : Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que $\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

Correction : $\mathrm{E}_c : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une solution double 2.

D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (k_1 n + k_2)2^n.$$

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_2 = -1 \\ (k_1 + k_2) \times 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

En conclusion,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n-1)2^n.$$

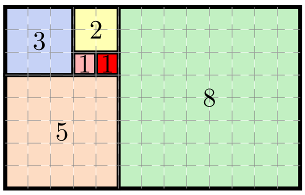
[4]. **FIBONACCI Leonardo**, italien, **1175** ?-**1240** ?. De son vrai nom Léonard de Pise, dit Fibonacci (signifiant « fils de Bonaccio »), Leonardo est le fils d'un administrateur de la ville de Pise. Commerçant et grand voyageur, il parcourut l'Europe et les pays d'orient tout en s'imprégnant des mathématiques de son époque inspirées des mondes grecs, indiens et arabes.

Dans son *Liber Abaci* (Livre de calcul), publié en 1202, principalement consacré aux calculs commerciaux, il affine et résout des problèmes algébriques déjà rencontrés dans l'œuvre du mathématicien **Al Khwarizmi**.

Fibonacci fait grand usage des nombres dits « arabes »(système décimal positionnel), du calcul fractionnaire et de la méthode de résolution des équations, dite de fausse position. Il publiera aussi un traité de géométrie, *Practica geometriae* (1220), où il applique des méthodes algébriques à des problèmes géométriques, et un traité sur le calcul des racines carrées et cubiques (*Liber Quadratorum*, 1225).

Le *Liber Abaci* est aussi un recueil de « petits » problèmes comme celui, resté célèbre, de la reproduction des lapins :

Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



On est ainsi conduit à la célèbre séquence des nombres de Fibonacci.

Index