

# XIX

## Suites récurrentes

*Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».  
Mais elles se font refouler à l'entrée...<sup>[1]</sup>*

### Contenu

---

I. Suites adjacentes .....	<b>1</b>
I.1 Théorème des suites adjacentes .....	1
I.2 Approximation décimale .....	2
I.3 Dichotomie .....	2
II. Suites récurrentes .....	<b>3</b>
II.1 Représentation graphique d'une suite récurrente .....	4
II.2 Stabilité et définition .....	4
II.3 Variations .....	5
II.4 Convergence et point fixe .....	7
II.5 Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1 .....	9
III. Suites récurrentes linéaires .....	<b>11</b>
III.1 Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .....	11
III.2 Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .....	12

---

[1]. Un peu d'humour qui se mérite. Vous comprendrez dans ce chapitre.

## I SUITES ADJACENTES

**Définition 1 (Suites adjacentes) :** Deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$ .

### I.1 Théorème des suites adjacentes

**Lemme 1 :** Soient deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  remplissant les conditions de la **définition (1)**.

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

**Théorème 1 :** Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite  $\ell$ . [2]

**Remarque :** En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$  :  $u_n$  et  $v_n$  sont des valeurs approchées de  $\ell$ , respectivement par défaut et par excès à  $v_n - u_n$  près.

**Exercice 1 :** Montrer que les suites  $(S_n)_{n \geq 1}$  et  $(T_n)_{n \geq 1}$  définies pour  $n \geq 1$  par  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  et  $T_n = S_n + \frac{1}{n}$  sont adjacentes.

En déduire que  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  converge.

### I.2 Approximation décimale

**Proposition 2 :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Les deux suites définies par  $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ , et  $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$  sont adjacentes et ont pour limite commune  $x$ .

Le décimal  $a_n$  est appelé *approximation décimale par défaut* de  $x$  à  $10^{-n}$  près, et le décimal  $b_n$  *approximation décimale par excès* de  $x$  à  $10^{-n}$  près.

**Exemple 1 :** Si  $x = \pi$ , on obtiendra  $a_3 = 3,141$  et  $b_3 = 3,142$ .

[2]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

**I.3** Dichotomie

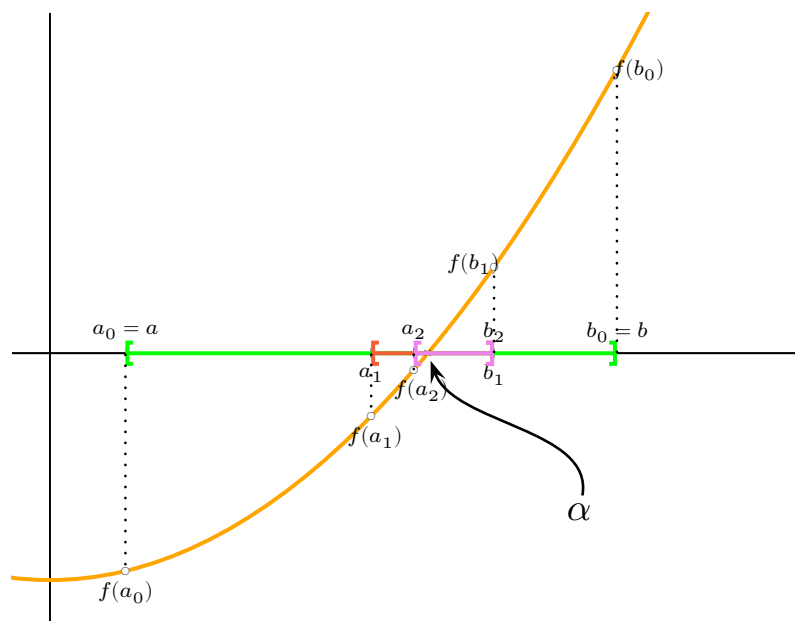
**Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a; b]$ , telle que  $f(a)f(b) < 0$ .

On construit deux suites récurrentes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant :

- $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,
  - si  $f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,
  - sinon, on pose  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

Les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune  $\alpha$  vérifiant  $f(\alpha) = 0$ .

De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$ , ce qui majore l'erreur commise en approchant  $\alpha$  par  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



**Figure XIX.1** – Méthode par dichotomie

**Remarque :**  $a_n$  est une valeur approchée de  $\alpha$  par défaut à  $\frac{b - a}{2^n}$  près,  $b_n$  est une valeur approchée par excès.

**Exemple 2 :** On cherche à étudier les variations de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$ .

Il est donc nécessaire de connaître le signe de  $g(x) = x^3 + 2x + 1$  donc de connaître ces racines.

La fonction  $g$ , étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, elle s'annule en un unique réel  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On aimerait déterminer une valeur approchée de  $\alpha$ . Ayons pour cela recours à la dichotomie.

```

1 def dichotomie (f,a,b,epsilon): # f continue et f(a)*f (t) <=0
2                               # avec a<b
3     while b-a >= epsilon:
4         milieu = (a+i)/2
5         if f(a)*f(milieu) <= 0: # f s'annule dans la
6                                 # première moitié
7             b = milieu
8         else :
9             a = milieu         # f s'annule dans la
10                                # deuxième moitié
11     return (a+i)/2.

```

Figure XIX.2 – Dichotomie en *Python*

- On commence par trouver un premier encadrement de  $\alpha$  en constatant que  $g(0) = 1$  et  $g(-1) = -2$ . La racine de  $g$  se trouve donc dans l'intervalle  $[-1; 0]$ .
- On calcule ensuite  $g(-0,5)$  qui se trouve être négatif, donc  $\alpha \in [-0,5; 0]$ .
- Puis on calcule  $g(-0,25)$ , qui est positif, donc  $\alpha \in [-0,5; -0,25]$ .

On sait donc déjà que  $\alpha \simeq -0,375$  à  $0,125$  près.

On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée.

**Remarque** : Pour obtenir une valeur approchée à  $\varepsilon > 0$  près, il suffit de choisir  $n$  tel que :

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \leq n$$

## II SUITES RÉCURRENTES

Dans tout cette section,  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  à valeurs réelles.

On étudie la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

**Exercice 2** : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

- 1 Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .
- 2 En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

### II.1 Représentation graphique d'une suite récurrente

**Méthode 1 (Représentation d'une suite) :**

Pour visualiser une suite définie par récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  dans un repère :

- On trace la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  associée et de la première bissectrice  $(\Delta) : x \mapsto x$ .
- On place le point  $(u_0; 0)$ .
- On trouve  $u_1 = f(u_0)$  à l'aide de  $\mathcal{C}_f$ .

- On reporte le  $(u_1; 0)$  à l'aide la bissectrice.
- On itère le procédé ...

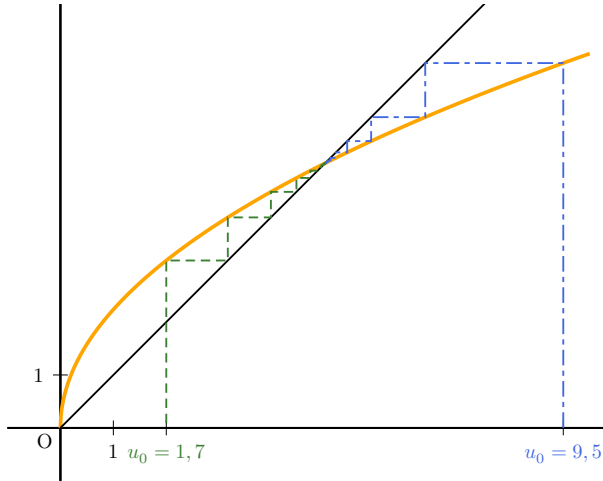


Figure XIX.3 -  $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$  avec  $u_0 = 2$  et  $u_0 = 9,5$ .

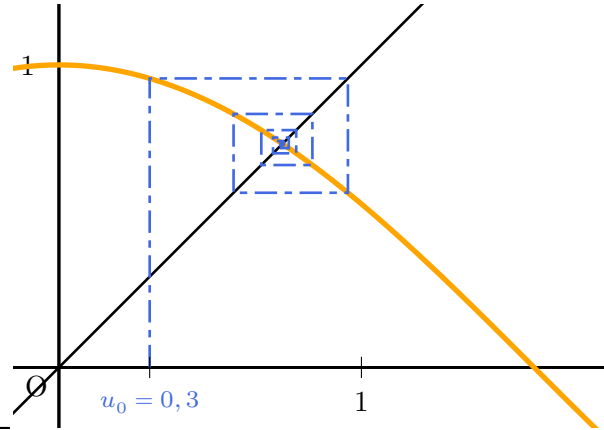


Figure XIX.4 -  $u_{n+1} = \cos(u_n)$  avec  $u_0 = 0,3$ .

Figure XIX.5 – Exemples de suites convergentes

## II.2 Stabilité et définition

**Définition 2 (Intervalle stable) :** On dit que l'intervalle  $I \subset \mathcal{D}_f$  est *stable* par  $f$  si  $f(I) \subset I$ .

**Proposition 4 (Existence de la suite) :**

Soit  $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$  et  $I \subset \mathcal{D}_f$  stable par  $f$ .

Si  $u_0 \in I$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ .

**ATTENTION**

Les relations  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$  ne définissent pas une suite !

**Exemple 3 :** On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$  où,  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$  la fonction associée est définie et strictement croissante de  $[-1; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$x$	-1	0	8	$+\infty$
$f$			3	$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être  $[0; 8]$ ,  $[-1; 8]$ ,  $[0; +\infty[$  ou  $[-1; +\infty[$  mais pas  $[-1; 0]$  ou  $[8; +\infty[$ .

### II.3 Variations

**Proposition 5 :** Pour tout  $x \in I$ , on considère le nombre  $\delta(x) = f(x) - x$ .

- 1 Si,  $\forall x \in I, \delta(x) \geq 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- 2 Si,  $\forall x \in I, \delta(x) \leq 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**Exemple 4 :** Reprenons la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de l'exemple (3).

$$\text{On a } \delta(x) = \sqrt{1+x} - x = \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x} = \frac{\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1+x}+x}.$$

$x$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	8
$f(x)$		0	+

Comme on a choisi  $I = [0; 8]$ , la quantité  $\delta(x)$  n'est pas de signe constant sur  $I$ . On ne peut pas utiliser cette propriété.

On aurait pu si on avait opté pour les intervalles de stabilité  $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 8\right]$  ou  $\left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$  plutôt que  $[0; 8]$ .

**Proposition 6 (Lien avec les fonctions monotones) :** Soit  $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}, I \subset \mathcal{D}_f$  stable par  $f$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
  - ◇ Si  $f(u_0) - u_0 \geq 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
  - ◇ Si  $f(u_0) - u_0 \leq 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors les suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones et de monotonie contraire.

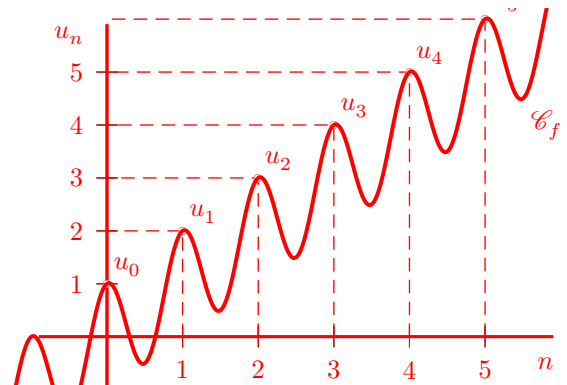
Pour les suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$f$ (dé)croissante  ~~$\Rightarrow$~~   $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par  $f(x) = x + \cos(2\pi x)$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \\ &= u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que  $u_n = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$  donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et pourtant,  $f$  ne l'est pas le moins du monde.



**ATTENTION**

**Exemple 5 :** Reprenons encore l'exemple (3).

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$  étant croissante sur  $[0; 8]$ , on peut en déduire que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.

Comme de plus  $v_0 = 8$  et  $v_1 = 3$ , on en conclut que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

Comme par ailleurs elle est minorée par 0, on peut en déduire que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

**Méthode 2 (Suite récurrente associée à une fonction décroissante) :**

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

- 1 de considérer  $g = f \circ f$  et de se ramener au cas  $g$  croissant pour conclure sur la monotonie des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 2 d'étudier le signe de la fonction  $x \mapsto g(x) - x$  pour déterminer la monotonie de  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  :
  - si  $g(u_0) - u_0 \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ),  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (resp. décroissante).
  - si  $g(u_1) - u_1 \leq 0$  (resp.  $\geq 0$ ),  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante (resp. croissante).

Dans le cas où  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**ATTENTION**

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.

**II.4** Convergence et point fixe

**Rappel (Point fixe) :** Soit une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $I$ .

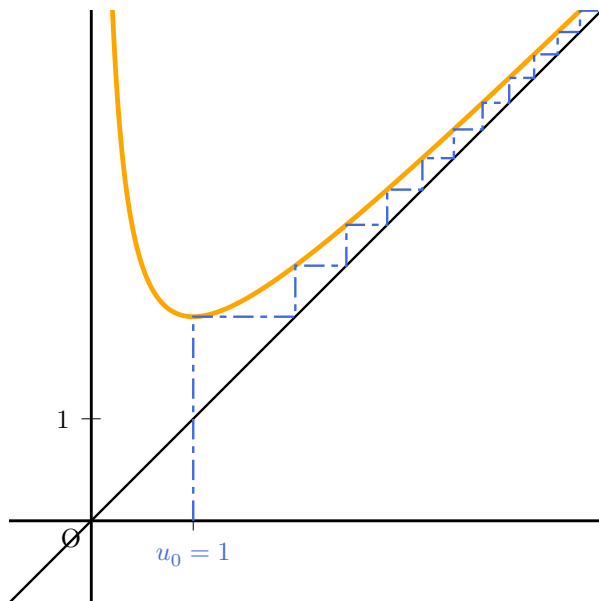
On appelle *point fixe* de  $f$  sur  $I$  tout réel  $x \in I$  vérifiant  $f(x) = x$ .

**Proposition 7 (Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge) :** Soient  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  avec  $I$  stable par  $f$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

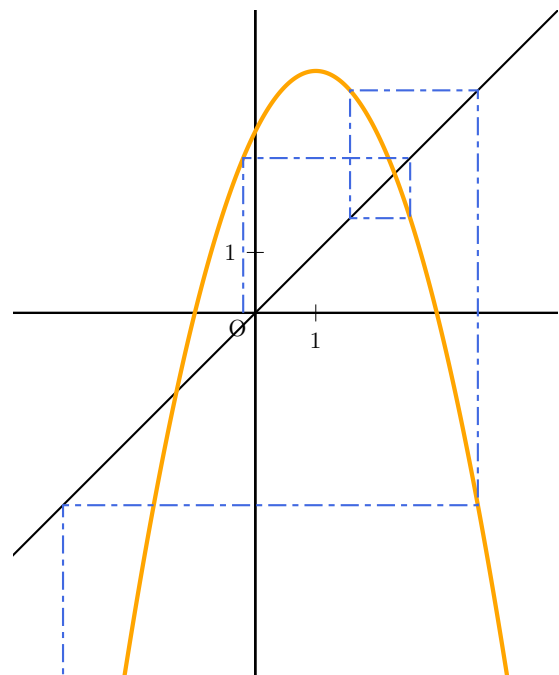
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si  $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \end{cases}$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$  i.e.  $f(\ell) = \ell$ .

En particulier, si  $f$  n'a pas de points fixes sur  $I$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut converger.



**Figure XIX.6** -  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$  avec  $u_0 = 1$ .  
 $f$  n'a pas de points fixes et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .



**Figure XIX.7** -  $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$  avec  $u_0 = -0, 2$ .  
 $f$  a deux points fixes et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ .

**Figure XIX.8** – Exemples de suites divergentes

**Remarque :** Pour déterminer les points fixes de  $f$ , on étudie les points d'annulation de la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  sur  $I$ .

**ATTENTION**

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.



Si  $f$  n'est pas continue, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas forcément vers un point fixe de  $f$ .

**ATTENTION**

Contre-Exemple 6 : Soient  $f : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$  converge vers  $\frac{1}{2}$  qui n'est pas un point fixe de  $f$ .

**Exemple 7 :** Revenons à l'exemple (3).

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et la fonction  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  est bien continue sur  $[0; 8]$ .  
 Par conséquent, la limite  $\ell$  de la suite vérifie  $\sqrt{1+\ell} = \ell$ .

D'où  $1 + \ell = \ell^2$  et  $\ell \geq 0$ . Finalement, on obtient  $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Remarques :** Dans le cas d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de  $g = f \circ f$ . Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de  $f$  sont aussi des points fixes de  $g$ . Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.

La réciproque est fautive : les points fixes de  $g$  ne sont pas nécessairement des points fixes de  $f$ .

**Contre-Exemple 8 :** La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  admet deux points fixes 1 et  $-1$  mais  $f \circ f$  n'admet que 1 comme point fixe.

- Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y converge aussi. À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

**Définition 3 (Fonction contractante) :** Soient  $I$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  une application.

On dit que  $f$  est *contractante sur*  $I$  si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $I$  avec  $0 < k < 1$ .

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si  $f$  est dérivable sur  $I$  et telle que  $|f'| \leq k < 1$  sur  $I$  alors  $f$  y est contractante.

**Théorème 8 (Théorème du point fixe) :** (Hors-Programme)

Soit  $f$  une application contractante sur un **segment**  $I$  stable par  $f$ .

Alors, toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $I$  par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers l'unique point fixe  $\ell$  de  $f$ .

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|. \quad (\text{XIX.1})$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives ».

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (XIX.1).

**Calcul approché du point fixe :** Le terme  $u_n$  constitue une estimation du point fixe  $\ell$  de  $f$  avec une précision au moins égale à  $k^n |u_0 - \ell|$ .

### ATTENTION

Bien remarquer que la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est

- 1 une **hypothèse** dans la **proposition** (7) .
- 2 une **conclusion** dans le **théorème** (8).

**Exercice 3 :** Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{5 + 2u_n} \end{cases}$  .

## II.5 Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient  $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ ,  $J \subset \mathcal{D}_f$  un intervalle et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1 La première chose à vérifier est que la fonction  $f$  est continue sur  $J$  ou, au moins sur un sous-intervalle  $I$  qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

### ATTENTION

- Si  $f$  n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge. La réciproque est fautive.

- a I est stable par  $f$  et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la **proposition** (4) .
- b I est un segment  $[a; b]$  i.e. fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.

- 2 Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de  $f$  sur  $I$  ainsi que le signe de  $\delta(x) = f(x) - x$ , en espérant qu'il y soit constant. C'est la **proposition** (5) .

On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

**Remarque :** Le signe de  $\delta$  dépend de la position de la courbe représentative de  $f$  par rapport à la première bissectrice.

- 3 I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de  $f$ . C'est le contenu de la **proposition** (7) et du **théorème** (8).

S'il n'en contient pas  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.

Si  $f$  possède des points fixes dans  $I$ , plusieurs cas se présentent alors :

- 4** **a** Le cas le plus facile : c'est celui où  $f$  est contractante sur  $I$  ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que  $|f'|$  soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur  $I$ .

Dans ce cas il y a un unique point fixe  $\alpha \in I$ , vers lequel la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (8)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

**ATTENTION**

- La fonction  $f$  n'est pas nécessairement croissante !
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas nécessairement monotone !

- b** Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où  $f$  est croissante.

Dans ce cas la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de  $u_0$ .

**ATTENTION**

- La fonction  $f$  n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction  $f$  peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas nécessairement croissante !

**Exemples :**  $f(x) = x^2$  n'est pas contractante sur  $[0; 1]$ , elle a plusieurs points fixes (deux), et les suites récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$  sont décroissantes.

- c** Un autre cas « gérable » est celui où  $f$  est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas **4**. **a**.

**ATTENTION**

- $f$  n'est pas nécessairement contractante !
- $f$  peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de  $f \circ f$ .

- i. Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- ii. S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

- ◇ les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- ◇ les sous-suites convergent vers deux points fixes différents :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

- d** Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu ... faire preuve de jugeotte et d'initiative ... Étudier le signe de  $f(x) - x$ , ...L'énoncé vous aidera !

**Exercice 4 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

- 1** Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0.

- 2 Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
- 3 Montrer que la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est 0 .
- 4 Supposons maintenant  $a < 0$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ?

### III SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

**Définition 4 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) :** On appelle *récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{K}^2. \quad (\text{XIX.2})$$

**Remarque :** Si  $b = 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $a$ . Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

**Définition 5 (Équation caractéristique) :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (XIX.2).

On appelle *équation caractéristique* associée à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

#### III.1 Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Théorème 9 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$  et soit  $\Delta$  le discriminant de son équation caractéristique.

- 1 Si  $\Delta \neq 0$  et  $r_1, r_2$  sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists !(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- 2 Si  $\Delta = 0$  et  $r$  est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists !(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

**III.2** Cas réel :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 

**Théorème 10** : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  et soit  $\Delta$  le discriminant de son équation caractéristique.

- 1** Si  $\Delta > 0$  et  $r_1, r_2$  sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- 2** Si  $\Delta = 0$  et  $r$  est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

- 3** Si  $\Delta < 0$  et  $r e^{\pm i\omega}$  sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left( \lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n) \right) r^n.$$

**Exemple 9 (Suite de Fibonacci)** : Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique  $x^2 - x - 1 = 0$  dont le discriminant est  $\Delta = 1 + 4 = 5$  et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire  $F_n = \lambda \phi^n + \mu \psi^n$  puis, avec les conditions initiales qui imposent  $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$  :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \psi^n).$$

**Exercice 5** : Déterminer  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  sachant que  $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$ .