Suites récurrentes

I Comportement asymptotique

Exercice 1 :

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
2. (a) On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{1-x}\, \mathrm{d}x$. Calculer I_0 et montrer que (I_n) converge vers 0 .
   (b) Montrer que $\mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k = \dfrac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que $u_n = e - \mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis déterminer $\lim u_n$.
3. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 2 : Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

Exercice 3 : Soit a un réel strictement positif.

On définit les deux suites :

$$\begin{cases} b_0 \text{ est arbitraire, élément de }]a\,;+\infty[\\ a_n = \dfrac{a}{b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{1}{2}\left(b_n + \dfrac{a}{b_n}\right). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant b_n$
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \sqrt{a}$.

Exercice 4 : Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. On considère les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}.$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant v_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 5 (Séries alternées) :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

   a. Étudier les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner un encadrement de sa limite.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0. On définit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k$.

   a. Montrer que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   b. Conclure.

II SUITES RÉCURRENTES

Exercice 6 : Dans un repère, représenter les suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

Exercice 7 : Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{5+2u_n} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \ln(u_n+3) \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3+u_n} \end{cases}$
7. $\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
8. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2+16}{2}} \end{cases}$
9. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{1+2u_n^2} \end{cases}$

Exercice 8 : On considère la suite u définie par la récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2{u_n}^2 \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 9 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.
On définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{6+x}$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer que $[3\,;+\infty[$ est stable par f. Qu'en déduit-on ? Donner les limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer $\sup_{[3;+\infty[}(f')$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - 3 < \dfrac{1}{6^{n-1}}$.
4. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 10 : Étude complète de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

Exercice 11 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

Exercice 12 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 13 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

III Suites récurrentes linéaires

Exercice 14 : Dans chacun des cas suivants, calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que :

1. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 3 \\ u_n u_{n+2} = 2u_{n+1}^3 \end{cases}$

Exercice 15 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Justifier l'existence de deux suites réelles (α_n) et (β_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

   Déterminer les réels α_n et β_n en fonction de n.

Exercice 16 (Suite de Fibonacci bis) : Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer F_n pour tout entier n.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.
3. Montrer que la suite $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge, et déterminer sa limite.
4. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} F_k = -F_n$.