

# *Suites réelles et complexes*

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 18



## 1 Suites numériques

- Vocabulaire et généralités
- Exemples
- Suites bornées
- Variations

## 2 Comportement asymptotique des suites

- Convergence et divergence
- Limite et relation d'ordre
- Composition par une fonction
- Opérations sur les limites
- Suites extraites

## 3 Théorèmes d'existence de limites

- Théorème d'encadrement
- Théorème de la limite monotone





es suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique).

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.





Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique).

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

On en trouve, par exemple, chez Archimède, pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700av. J.-C. et plus récemment au I<sup>er</sup> siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

*Pour extraire la racine carrée de  $A$ , choisir une expression arbitraire  $a$  et prendre la moyenne entre  $a$  et  $\frac{A}{a}$  et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent*

En notation moderne, cela définit la suite de nombres  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{A}{u_n} \right).$$



**S**n retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV<sup>ème</sup> siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur **convergence**.



**S**n retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV<sup>ème</sup> siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur **convergence**.

**S**'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites numérique ouvre la porte à bien d'autres notions séquentielle comme les suites de fonctions, séries, séries entières ou de Fourier. Voyez ce chapitre comme leur préambule.



Comme toujours,  $\mathbb{K}$  désignera l'un ou l'autre des corps  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

**Notation toute personnelle** : *Dans tout ce chapitre, nombre de prédicats, de définitions et de propositions ne sont vrais ou ne nécessitent d'être vrais qu'à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ .*

*Afin d'alléger les énoncés sans perdre en généralité, je noterai parfois*

$\mathbb{N}_{n_0} = \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$  *l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à  $n_0$ .*

*Ainsi, une propriété vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}_{n_0}$  signifiera qu'elle n'est vraie qu'à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Rang qui importe peu.*



# I. Suites numériques

- 1 **Suites numériques**
  - Vocabulaire et généralités
  - Exemples
  - Suites bornées
  - Variations
- 2 Comportement asymptotique des suites
- 3 Théorèmes d'existence de limites





# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

### Définition 1 :

Une **suite**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$ .

Une **suite numérique** est une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & & u_n \end{array}$$

À chaque **indice**  $n \in \mathbb{N}$  on associe un nombre  $u_n$  appelé **terme** de rang  $n$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

L'ensemble des suites est noté  $\mathcal{S}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Remarque** : Fondamentalement, cela ne change rien de considérer une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie à partir d'un certain rang  $n_0$ .

**ATTENTION**

$u_n \neq (u_n)_{n \in \mathbb{N}} !$



# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rencontrées sont définies :

- de manière **explicite** :  $u_n = \frac{3n - 1}{n + 2}$ .



# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rencontrées sont définies :

- de manière **explicite** :  $u_n = \frac{3n - 1}{n + 2}$ .
- de manière **récurrente** : 
$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}. \end{cases}$$



# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rencontrées sont définies :

- de manière **explicite** :  $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$ .
- de manière **récurrente** : 
$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}. \end{cases}$$
- de manière **implicite** :  $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ .



# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

L'ensemble des suites réelles  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est naturellement muni d'opérations de somme (on additionne les deux suites terme à terme), de produit et de produit par un réel.

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles (ou complexes).

- La **suite somme** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite notée  $(u + v)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n.$$

# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles (ou complexes).

- La **suite somme** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite notée  $(u + v)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n.$$

- Le **suite produit** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite notée  $(u \times v)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$



# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles (ou complexes).

- La **suite somme** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite notée  $(u + v)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n.$$

- Le **suite produit** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite notée  $(u \times v)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$

- Le **suite produit de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ )** est la suite notée  $(\lambda u)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda u)_n = \lambda \times u_n.$$



# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles (ou complexes).

- La **suite somme** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite notée  $(u + v)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n.$$

- Le **suite produit** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite notée  $(u \times v)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$

- Le **suite produit de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ )** est la suite notée  $(\lambda u)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda u)_n = \lambda \times u_n.$$

- Les **suites parties réelle et imaginaire** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont respectivement les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\operatorname{Re}(u))_n = \operatorname{Re}(u_n) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Im}(u))_n = \operatorname{Im}(u_n).$$





# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

En particulier, l'ensemble des suites réelles (ou complexe) contient la suite nulle dont tous les termes sont égaux à 0 et est stable par combinaisons linéaires : C'est un espace vectoriel réel (ou complexe).



# I. Suites numériques

## 1. Vocabulaire et généralités

En particulier, l'ensemble des suites réelles (ou complexe) contient la suite nulle dont tous les termes sont égaux à 0 et est stable par combinaisons linéaires : C'est un espace vectoriel réel (ou complexe).

En considérant la suite produit, c'est même une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative mais non intègre.



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

Définition 3 :

**Suite arithmétique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un scalaire  $r$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

Définition 3 :

**Suite arithmétique :** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un scalaire  $r$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

**Suite géométrique :** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **géométrique** lorsqu'il existe un scalaire  $q$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

Définition 3 :

**Suite arithmétique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un scalaire  $r$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

**Suite géométrique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **géométrique** lorsqu'il existe un scalaire  $q$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

**Suite arithmético-géométrique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe un couple  $(a; b) \in \mathbb{K}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

Définition 3 :

**Suite arithmétique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un scalaire  $r$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

**Suite géométrique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **géométrique** lorsqu'il existe un scalaire  $q$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

**Suite arithmético-géométrique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe un couple  $(a; b) \in \mathbb{K}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

Définition 3 :

**Suite arithmétique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un scalaire  $r$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

**Suite géométrique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **géométrique** lorsqu'il existe un scalaire  $q$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

**Suite arithmético-géométrique** : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe un couple  $(a; b) \in \mathbb{K}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

**Remarque** : Si  $a = 1$ , la suite arithmético-géométrique précédente est une suite arithmétique, géométrique si  $b = 0$ .



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ( $m < n$ )	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \frac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n - m)r$	$(n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$

Figure 1 –  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique.





# I. Suites numériques

## 2. Exemples

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ( $m < n$ )	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \frac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n - m)r$	$(n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$

Figure 1 –  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ( $m < n$ )	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\frac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n - m + 1)$ si $q = 1$ .
				$u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$

Figure 2 –  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique.



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

### Exemples I :

- La suite des entiers naturels :  $u_0 = 0, u_1 = 1, \dots, u_n = n, \dots$  et la suite des multiples de 3 :  $u_0 = 0, u_1 = 3, \dots, u_n = 3n, \dots$  sont des suites arithmétiques.

### Exercice I :

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $z_0 = 2$  et  $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$  pour tout  $n \geq 0$ .

Montrer que la suite de terme général  $t_n = \frac{z_n}{2^n}$  est arithmétique et en déduire une expression explicite de  $z_n$ .



# I. Suites numériques

## 2. Exemples

### Exemples I :

- La suite des entiers naturels :  $u_0 = 0, u_1 = 1, \dots, u_n = n, \dots$  et la suite des multiples de 3 :  $u_0 = 0, u_1 = 3, \dots, u_n = 3n, \dots$  sont des suites arithmétiques.
- La suite des puissances de 2 :  $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, \dots, u_n = 2^n \dots$  est une suite géométrique.

### Exercice I :

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $z_0 = 2$  et  $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$  pour tout  $n \geq 0$ .

Montrer que la suite de terme général  $t_n = \frac{z_n}{2^n}$  est arithmétique et en déduire une expression explicite de  $z_n$ .



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .
- **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .
- **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .
- **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Les majorants (ou minorants) d'une suite sont, par définition des constantes.

**ATTENTION**

Une majoration (une minoration) de  $u_n$  par un réel **qui dépend** de  $n$  ne montre **PAS** que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée (ou minorée).



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Exemples 2 :

- La suite  $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 1 et minorée par  $-1$ . Elle est donc bornée.





# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Exemples 2 :

- La suite  $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 1 et minorée par  $-1$ . Elle est donc bornée.
- La suite  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0.  
En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Exemples 2 :

- La suite  $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 1 et minorée par  $-1$ . Elle est donc bornée.
- La suite  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0.  
En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

### Méthode 1 :

Avant de se lancer dans l'encadrement d'une suite, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence  $u_n - m$  ou  $u_n - M$ .



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

### Méthode 1 :

Avant de se lancer dans l'encadrement d'une suite, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence  $u_n - m$  ou  $u_n - M$ .
- Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $u_n = f(n)$  ou  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on peut utiliser le tableau de variations de la fonction  $f$  pour montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée, minorée ou bornée.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

### Méthode I :

Avant de se lancer dans l'encadrement d'une suite, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence  $u_n - m$  ou  $u_n - M$ .
- Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $u_n = f(n)$  ou  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on peut utiliser le tableau de variations de la fonction  $f$  pour montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée, minorée ou bornée.
- Si le terme général est donné sous la forme d'un quotient, on peut majorer/minorer numérateur et dénominateur.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

### Exercice 2 :

Soit  $\alpha \in ]0; 1[$  fixé.

① Montrer que  $\forall x \in ]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$ .

② En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha^k)$  est bornée.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée :

- On se donne un réel  $A$  quelconque.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée :

- On se donne un réel  $A$  quelconque.
- On montre que l'on peut toujours trouver un terme de la suite plus grand que  $A$  en résolvant, par exemple, l'inéquation  $u_n \geq A$ .





# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Proposition 1 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Proposition 1 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Proposition 1 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :

Définition 5 (Suite complexe bornée) :

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

On dit que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **bornée** si la suite réelle positive  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Proposition 1 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :

Définition 5 (Suite complexe bornée) :

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

On dit que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **bornée** si la suite réelle positive  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

Exemple 3 :

$(e^{in})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée  $\iff (\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée  $\iff (\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées.

Exercice 3 :

Montrer que l'ensemble des suites bornées est non vide, est stable par combinaisons linéaires, produits, et produits par un scalaire.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée  $\iff (\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées.

Exercice 3 :

Montrer que l'ensemble des suites bornées est non vide, est stable par combinaisons linéaires, produits, et produits par un scalaire.

On dit que l'ensemble des suites bornées muni des trois opérations  $+$ ,  $\times$  et de la multiplication par un scalaire vue comme loi externe est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition  $\mathcal{b}$  (Relation de domination) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **dominée** par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

On note alors  $u_n = O(v_n)$ .





# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition  $\llcorner$  (Relation de domination) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **dominée** par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

On note alors  $u_n = O(v_n)$ .

Cette notation est dû à Landau :

- On lit aussi «  $u_n$  est un un grand O de  $v_n$ . »



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition  $\mathcal{b}$  (Relation de domination) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **dominée** par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

On note alors  $u_n = O(v_n)$ .

Cette notation est dû à Landau :

- On lit aussi «  $u_n$  est un un grand O de  $v_n$ . »
- On écrit aussi  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  même s'il est assez clair que la domination ne se fait qu'au voisinage de l'infini où à partir d'un certain rang.



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Définition  $\mathcal{L}$  (Relation de domination) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas.

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **dominée** par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

On note alors  $u_n = O(v_n)$ .

Cette notation est dû à Landau :

- On lit aussi «  $u_n$  est un un grand O de  $v_n$ . »
- On écrit aussi  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  même s'il est assez clair que la domination ne se fait qu'au voisinage de l'infini où à partir d'un certain rang.

Remarque : D'après la **proposition (1)** ,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n) \iff \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, |u_n| \leq M |v_n|.$$



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors  $u_n = O(1)$ .



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors  $u_n = O(1)$ .
- $2n^2 + 1 = O(n^2)$  et  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors  $u_n = O(1)$ .
- $2n^2 + 1 = O(n^2)$  et  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .
- $\begin{cases} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w_n) \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n = O(w_n)$ .



# I. Suites numériques

## 3. Suites bornées

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors  $u_n = O(1)$ .
- $2n^2 + 1 = O(n^2)$  et  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .
- $\begin{cases} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w_n) \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n = O(w_n)$ .
- $\begin{cases} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w'_n) \end{cases} \Rightarrow u_n \times v_n = O(w_n \times w'_n)$ .



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles est :

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$ .





# I. Suites numériques

## 4. Variations

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles est :

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq u_{n+1}$ .



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Définition 1 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles est :

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq u_{n+1}$ .
- **stationnaire** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = u_{n+1}$ .



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Définition 1 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles est :

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq u_{n+1}$ .
- **stationnaire** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = u_{n+1}$ .

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Définition 1 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles est :

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq u_{n+1}$ .
- **stationnaire** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = u_{n+1}$ .

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

On parlera aussi de suites **strictement monotones** lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles est :

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq u_{n+1}$ .
- **stationnaire** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = u_{n+1}$ .

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

On parlera aussi de suites **strictement monotones** lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

**ATTENTION**

- ❗ La notion de suites monotones n'existe pas pour les suites à valeurs complexes.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles est :

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq u_{n+1}$ .
- **stationnaire** si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = u_{n+1}$ .

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

On parlera aussi de suites **strictement monotones** lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

**ATTENTION**

- ❶ La notion de suites monotones n'existe pas pour les suites à valeurs complexes.
- ❷ Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes, ni monotones, ni rien.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$ ,  $u_n = \tan(n)$  ne sont pas monotones.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$ ,  $u_n = \tan(n)$  ne sont pas monotones.
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \prod_{k=0}^n (100 - k)$  est stationnaire à 0 à partir du rang  $n = 100$ .





# I. Suites numériques

## 4. Variations

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$ ,  $u_n = \tan(n)$  ne sont pas monotones.
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \prod_{k=0}^n (100 - k)$  est stationnaire à 0 à partir du rang  $n = 100$ .

Exercice 4 :

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \geq 0$ , on pose  $u_n = \cos\left(\frac{2\pi n!}{p!}\right)$ .

Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ④ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
  - si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ④ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
- si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ④ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
- si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,
  - si  $r \leq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ① Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
  - si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,
  - si  $r \leq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,
- ② Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison  $q$  relativement à 1 et le signe de son premier terme  $u_0$  :



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ① Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
  - si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,
  - si  $r \leq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,
- ② Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison  $q$  relativement à 1 et le signe de son premier terme  $u_0$  :
  - Si  $q = 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à 0 à partir de son deuxième terme.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ① Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
  - si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,
  - si  $r \leq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,
- ② Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison  $q$  relativement à 1 et le signe de son premier terme  $u_0$  :
  - Si  $q = 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
  - si  $u_0 \geq 0$  et  $q > 1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (strictement si  $u_0 > 0$ ).





# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ① Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
  - si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,
  - si  $r \leq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,
- ② Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison  $q$  relativement à 1 et le signe de son premier terme  $u_0$  :
  - Si  $q = 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
  - si  $u_0 \geq 0$  et  $q > 1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (strictement si  $u_0 > 0$ ).
  - Si  $q = 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à  $u_0$ .



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ① Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
  - si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,
  - si  $r \leq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,
- ② Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison  $q$  relativement à 1 et le signe de son premier terme  $u_0$  :
  - Si  $q = 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
  - si  $u_0 \geq 0$  et  $q > 1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (strictement si  $u_0 > 0$ ).
  - Si  $q = 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à  $u_0$ .
  - Si  $u_0 \geq 0$  et  $0 < q < 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante (strictement si  $u_0 > 0$ ).



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Proposition 3 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- ① Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison  $r$  :
  - si  $r \geq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante,
  - si  $r \leq 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante,
- ② Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison  $q$  relativement à 1 et le signe de son premier terme  $u_0$  :
  - Si  $q = 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
  - si  $u_0 \geq 0$  et  $q > 1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (strictement si  $u_0 > 0$ ).
  - Si  $q = 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à  $u_0$ .
  - Si  $u_0 \geq 0$  et  $0 < q < 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante (strictement si  $u_0 > 0$ ).
  - Si  $q < 0$  et  $u_0 \neq 0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas monotone.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante :

- On exprime  $u_{n+1} - u_n$  on factorise, réduit au même dénominateur, ...



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante :

- On exprime  $u_{n+1} - u_n$ , on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .



# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante :

- On exprime  $u_{n+1} - u_n$ , on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

### Méthode 4 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

- On exprime  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , on factorise, simplifie majeure, mineure, ...

# I. Suites numériques

## 4. Variations

### Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante :

- On exprime  $u_{n+1} - u_n$ , on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

### Méthode 4 :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

- On exprime  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , on factorise, simplifie majeure, mineure, ...
- On montre le numérateur est plus grand que le dénominateur i.e.  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ .

# I. Suites numériques

## 4. Variations

Exercice 5 :

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par 
$$u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante.





# I. Suites numériques

## 4. Variations

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :

Soient  $f$  une fonction définie sur  $[n_0; +\infty[$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :

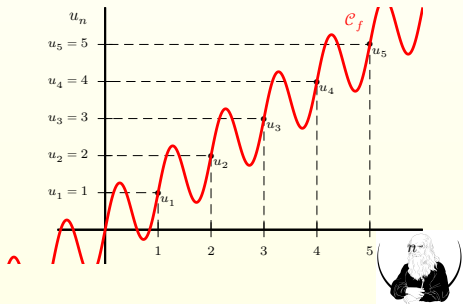
Soient  $f$  une fonction définie sur  $[n_0; +\infty[$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Soit la fonction  $f : x \mapsto x + \sin(2\pi x)$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = f(n)$ .

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + \sin(2\pi n) = n$ .  
La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.



# I. Suites numériques

## 4. Variations

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :

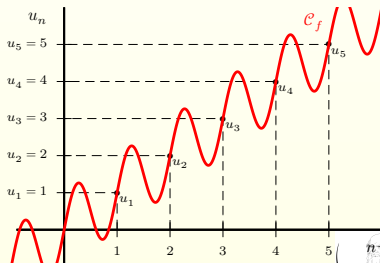
Soient  $f$  une fonction définie sur  $[n_0; +\infty[$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Soit la fonction  $f : x \mapsto x + \sin(2\pi x)$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = f(n)$ .

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + \sin(2\pi n) = n$ .  
La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- La fonction, représentée en rouge, n'est même pas monotone.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1 Suites numériques

### 2 Comportement asymptotique des suites

- Convergence et divergence
- Limite et relation d'ordre
- Composition par une fonction
- Opérations sur les limites
- Suites extraites

### 3 Théorèmes d'existence de limites



## II. Comportement asymptotique des suites

Il est temps de s'intéresser au comportement d'une suite lorsque  $n \rightarrow +\infty$   
*i.e.* son **comportement asymptotique**..

Deux cas, opposés l'un de l'autre se présentent : les suites convergentes et les suites divergentes. Parmi ces dernières, les divergentes vers l'infini et celle n'ayant pas de limites.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $\ell$  pour limite et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  si tout voisinage de  $\ell$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \in V_\ell.$$

En particulier :

## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $l$  pour limite et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  si tout voisinage de  $l$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \in V_\ell.$$

En particulier :

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** vers  $l \in \mathbb{R}$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $\ell$  pour limite et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  si tout voisinage de  $\ell$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \in V_\ell.$$

En particulier :

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** vers  $\ell \in \mathbb{R}$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente** vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \geq A.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $\ell$  pour limite et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  si tout voisinage de  $\ell$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \in V_\ell.$$

En particulier :

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** vers  $\ell \in \mathbb{R}$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente** vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \geq A.$$

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente** vers  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \leq A.$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $\ell$  pour limite et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  si tout voisinage de  $\ell$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \in V_\ell.$$

En particulier :

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** vers  $\ell \in \mathbb{R}$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente** vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \geq A.$$

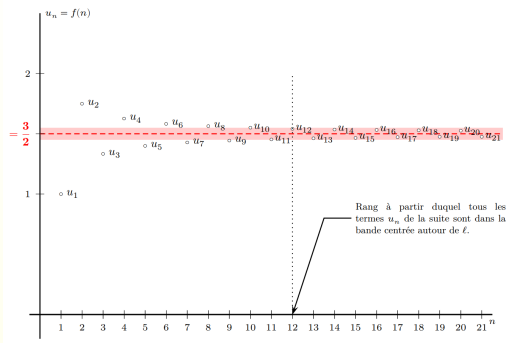
- ◇ On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente** vers  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \leq A.$$

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **diverge** si elle ne converge pas.

## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence



**Figure 3** – La suite définie par  $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}$  converge vers  $l = \frac{3}{2}$ .

Rappel :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $l \in \mathbb{R}$ .

$$|u_n - l| \leq \epsilon \iff u_n \in [l - \epsilon; l + \epsilon] \iff l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon.$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

**ATTENTION**

Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

**ATTENTION**

Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

Exemple 6 :

La suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

En effet,  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne prend que les valeurs 1 et  $-1$  donc ne peut converger que vers une de ces valeurs.

Comme  $\left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$  est un voisinage de 1 ne contenant pas  $u_{2n+1} = -1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut converger vers 1. De même avec  $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right]$  et  $u_{2n} = 1$ ,  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut converger vers  $-1$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

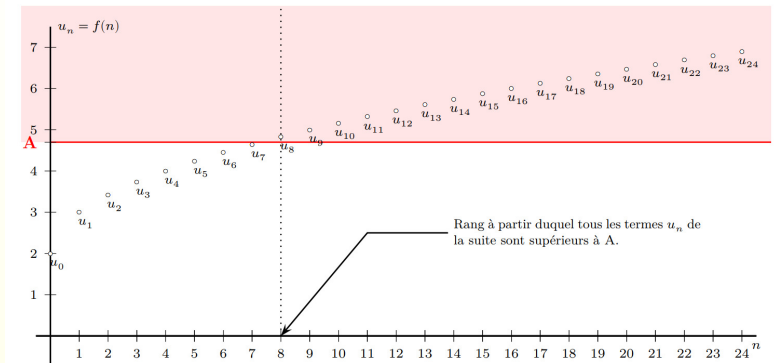


Figure 4 – La suite définie par  $u_n = \sqrt{n} + 2$  diverge vers  $+\infty$ .

**Remarques** : Le comportement asymptotique d'une suite ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Exemple 1 :

La suite  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

Tout intervalle  $[-a; a]$ ,  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ , contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang  $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + 1$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

La **définition (9)** se prolonge aux suites à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module :

**Définition 9 (Limite d'une suite complexe) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** vers  $\ell \in \mathbb{C}$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$





## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

La **définition (9)** se prolonge aux suites à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module :

**Définition 9 (Limite d'une suite complexe) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** vers  $\ell \in \mathbb{C}$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

**ATTENTION**

La notion de suites complexes divergeant vers l'infini ne veut rien dire dans  $\mathbb{C}$  !



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

On déduit immédiatement de la **définition (9)** la proposition ci-dessous :

Proposition 5 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes et  $l \in \mathbb{C}$ .

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Proposition 5 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Proposition 5 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell). \end{cases}$$

$$\text{En particulier, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Proposition 5 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell). \end{cases}$$

$$\text{En particulier, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{u_n} = \bar{\ell}.$$

#### Corollaire 5.1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Proposition 5 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell). \end{cases}$$

$$\text{En particulier, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{u_n} = \bar{\ell}.$$

#### Corollaire 5.1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|.$$

**ATTENTION**

La réciproque est fautive. Il suffit de considérer la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Exercice 6 :

- ① Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$ .  
Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Exercice 6 :

- 1 Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$ .  
Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.
- 2 Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle périodique de période  $p \in \mathbb{N}^*$  i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$ .  
Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente alors elle est constante.





## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Proposition 6 :

Soient  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ .

Si,  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ ,  $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $\ell$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Proposition 6 :

Soient  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ .

Si,  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ ,  $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $\ell$ .

#### Proposition 7 :

①  $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 et  $(n^p)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent vers  $+\infty$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Proposition 6 :

Soient  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ .

Si,  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ ,  $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $\ell$ .

#### Proposition 7 :

①  $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 et  $(n^p)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent vers  $+\infty$ .

②  $\forall q \in ]-1; 1[$ ,  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Exemple 8 :

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} \right)^n$  converge vers 0.

Corollaire 71 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge (vers  $\pm\infty$ ) si, et seulement si  $r \neq 0$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Exercice 7 :

Montrer que  $[0; 1] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0; 1 + \frac{1}{n}\right]$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 1. Convergence et divergence

#### Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites alors elle diverge.





## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

**ATTENTION**

La réciproque est encore fausse toujours en considérant  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

**ATTENTION**

La réciproque est encore fautive toujours en considérant  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Exemple 9 :

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = (1 + i)^n$  diverge.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

Corollaire 9.1 :

- ④ Toute suite convergeant vers un réel  $\ell$  strictement positif ou divergeant vers  $+\infty$  est minorée par un réel  $m$  strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq m > 0.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

Corollaire 9.2 :

- ① Toute suite convergeant vers un réel  $\ell$  strictement positif ou divergeant vers  $+\infty$  est minorée par un réel  $m$  strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq m > 0.$$

- ② Toute suite convergeant vers un réel  $\ell$  strictement négatif ou divergeant vers  $-\infty$  est majorée par un réel  $M$  strictement négatif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell < 0 \implies \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq -M < 0.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

**Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers un réel  $\ell$  et et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

④ Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n < M$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

**Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers un réel  $\ell$  et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

- ① Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n < M$ .
- ② Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > m$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n > m$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

**Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers un réel  $\ell$  et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

- ① Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n < M$ .
- ② Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > m$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n > m$ .

**Théorème 11 (Limites et inégalités larges) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq v_n \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$





## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

**Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers un réel  $\ell$  et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

- ① Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n < M$ .
- ② Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > m$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n > m$ .

**Théorème 11 (Limites et inégalités larges) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq v_n \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

**Remarque :** Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

Exemple 10 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente avec  $u_n \leq A$  à partir d'un certain rang.

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq A$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 2. Limite et relation d'ordre

Exemple 10 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente avec  $u_n \leq A$  à partir d'un certain rang.

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq A$ .

ATTENTION

C'est **TRÈS** faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n} > 0$  mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

Une suite, n'étant qu'une fonction particulière, on peut traduire les théorèmes sur les limites de composée :

**Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $I$ .

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

**Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $I$ .

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

**Exemples II (Importants) :**

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ , alors  $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

**Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  une application et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $I$ .

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

**Exemples II (Importants) :**

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ , alors  $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .
- Si  $f$  est continue en  $a$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ , alors  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

**Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $I$ .

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

**Exemples II (Importants) :**

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ , alors  $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .
- Si  $f$  est continue en  $a$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ , alors  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x.$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$





## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

■ ...



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

Exemples 12 :

$$\diamond \arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Les derniers exemples montrent que  $1^\infty$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

De même  $\infty^0$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres :  $0^0$ ,  $0^\infty$  et  $\infty^\infty$  que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

ATTENTION



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

Exemples 12 :

$$\diamond \arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

$$\diamond \text{ Si } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0 \text{ alors } u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ indépendant de } n.$$

Les derniers exemples montrent que  $1^\infty$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

De même  $\infty^0$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres :  $0^0$ ,  $0^\infty$  et  $\infty^\infty$  que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

ATTENTION



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

Exemples 12 :

$$\diamond \arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

$$\diamond \text{ Si } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0 \text{ alors } u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ indépendant de } n.$$

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Les derniers exemples montrent que  $1^\infty$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

De même  $\infty^0$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres :  $0^0$ ,  $0^\infty$  et  $\infty^\infty$  que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

ATTENTION



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

Exemples 12 :

$$\diamond \arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

$$\diamond \text{ Si } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0 \text{ alors } u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ indépendant de } n.$$

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$\diamond n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Les derniers exemples montrent que  $1^\infty$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

De même  $\infty^0$  est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \not\Rightarrow \quad u_n^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres :  $0^0$ ,  $0^\infty$  et  $\infty^\infty$  que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

ATTENTION



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que  $t^n = e^{n \ln t}$  pour  $t > 0$ , on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 121 (Limites usuelles et croissances comparées) :

Puissances de  $n$  : Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 3. Composition par une fonction

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que  $t^n = e^{n \ln t}$  pour  $t > 0$ , on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 12.2 (Limites usuelles et croissances comparées) :

**Puissances de  $n$  :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

**Croissances comparées :** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $q > 1$  et  $x \in ]-1; 1[$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x^n = 0$
---	---	---





## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

- Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

◇  $a + (+\infty) = +\infty$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition IO (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

$$\diamond a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

$$\diamond a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$$

$$\diamond \frac{1}{0^+} = +\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

$$\diamond a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$$

$$\diamond \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\diamond \frac{1}{0^-} = -\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

$$\diamond a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$$

$$\diamond \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\diamond \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\diamond \frac{1}{+\infty} = 0^+$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

$$\diamond a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$$

$$\diamond \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\diamond \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\diamond \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\diamond \frac{1}{-\infty} = 0^-.$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ ) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

■ Pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\diamond a + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond a + (-\infty) = -\infty$$

$$\diamond (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

■ Pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\diamond (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\diamond (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

■ On ajoute deux symboles  $0^+$  et  $0^-$  vérifiant pour  $a \neq 0$  :

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

$$\diamond a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$$

$$\diamond \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\diamond \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\diamond \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\diamond \frac{1}{-\infty} = 0^-.$$

Les quotients  $\frac{a}{b}$  s'obtiennent comme  $a \times \frac{1}{b}$  si l'opération est définie.

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

#### ATTENTION

Les opérations  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $0 \times (+\infty)$ ,  $0 \times (-\infty)$ ,  $\frac{0^\pm}{0^\pm}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $(0^\pm)^{\pm\infty}$  et  $(\pm\infty)^{0^\pm}$  ne sont pas définies et appelées « formes indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Proposition 13 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles admettant des limites  $l$  et  $l'$ .

**Somme :** Si  $l + l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Proposition 13 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles admettant des limites  $l$  et  $l'$ .

**Somme :** Si  $l + l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$ .

**Multiple :** Si  $\lambda.l$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $\lambda.u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda.l$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

#### Proposition 13 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles admettant des limites  $l$  et  $l'$ .

**Somme :** Si  $l + l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$ .

**Multiple :** Si  $\lambda.l$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $\lambda.u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda.l$ .

**Produit :** Si  $l \times l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n \times v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \times l'$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

#### Proposition 13 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles admettant des limites  $l$  et  $l'$ .

**Somme :** Si  $l + l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$ .

**Multiple :** Si  $\lambda.l$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $\lambda.u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda.l$ .

**Produit :** Si  $l \times l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n \times v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \times l'$ .

**Inverse :** Si  $\frac{1}{l}$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{l}.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

#### Proposition 13 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles admettant des limites  $l$  et  $l'$ .

**Somme** : Si  $l + l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$ .

**Multiple** : Si  $\lambda.l$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $\lambda.u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda.l$ .

**Produit** : Si  $l \times l'$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $u_n \times v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \times l'$ .

**Inverse** : Si  $\frac{1}{l}$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{l}.$$

**Quotient** : Si  $\frac{l}{l'}$  est défini sur  $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$ , alors  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{l}{l'}.$$





## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

**Remarque** : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un **espace vectoriel**.

Dans la même idée, l'opérateur  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$  est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

**Remarque** : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un **espace vectoriel**.

Dans la même idée, l'opérateur  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$  est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**ATTENTION**

L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

**Remarque** : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un **espace vectoriel**.

Dans la même idée, l'opérateur  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$  est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

#### ATTENTION

L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Exemples 13 :

$$\blacksquare u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$\blacksquare u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{u_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée  $(+\infty) - (+\infty)$ ) :

- On peut obtenir n'importe quel réel  $l$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + l) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + l) - n) = l$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée  $(+\infty) - (+\infty)$ ) :

- On peut obtenir n'importe quel réel  $l$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + l) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + l) - n) = l$ .
- On peut obtenir  $\pm\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée  $(+\infty) - (+\infty)$ ) :

- On peut obtenir n'importe quel réel  $l$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + l) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + l) - n) = l$ .
- On peut obtenir  $\pm\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$ .
- On peut ne pas obtenir de limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + (-1)^n - n)$  n'a pas de limite.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée  $(+\infty) - (+\infty)$ ) :

- On peut obtenir n'importe quel réel  $\ell$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \ell) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + \ell) - n) = \ell$ .
- On peut obtenir  $\pm\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$ .
- On peut ne pas obtenir de limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + (-1)^n - n)$  n'a pas de limite.

**ATTENTION**

$(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  peuvent avoir des limites sans que ce ne soit le cas pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ni  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée  $0 \times (\infty)$ ) :

- On peut obtenir n'importe quel réel  $l$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{n} \times n = l.$$





## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée  $0 \times (\infty)$ ) :

- On peut obtenir n'importe quel réel  $l$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{n} \times n = l.$$

- On peut obtenir  $\pm\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée  $0 \times (\infty)$ ) :

- On peut obtenir n'importe quel réel  $\ell$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} \times n = \ell.$$

- On peut obtenir  $\pm\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty$ .

- On peut ne pas obtenir de limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times n \text{ n'a pas de limite.}$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 4. Opérations sur les limites

Exercice 8 :

Soit  $u_n = \frac{\ln(n) + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

Définition II (Suite extraite) :

Une **sous-suite** d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelée aussi **suite extraite**, est une suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  est une application **strictement** croissante.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

Définition II (Suite extraite) :

Une **sous-suite** d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelée aussi **suite extraite**, est une suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  est une application **strictement** croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ , on ne garde que les termes d'indice pair de la suite, et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , on garde les termes d'indice impair,  $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ , ...



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

Définition II (Suite extraite) :

Une **sous-suite** d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelée aussi **suite extraite**, est une suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  est une application **strictement** croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ , on ne garde que les termes d'indice pair de la suite, et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , on garde les termes d'indice impair,  $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ , ...

Lemme I :

Soit  $\varphi$  une fonction strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

**Théorème 14 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers une limite  $l$ .

Alors toute sous-suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers cette même limite  $l$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

**Théorème 14 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers une limite  $\ell$ .

Alors toute sous-suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers cette même limite  $\ell$ .

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite comme à l' **exercice** (9) .





## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

**Théorème 14 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers une limite  $\ell$ .

Alors toute sous-suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers cette même limite  $\ell$ .

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite comme à l' **exercice (9)** .

**ATTENTION**

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite.

Il faut que l'ensemble des suites extraites considérées permette de contrôler de façon complète tous les termes de la suite (au moins à partir d'un certain rang).



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

Exemple 16 :

Si  $x \in ]-1; 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0$ .

On remarquera bien que la suite  $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas géométrique,  $x^{2^n}$  et  $(x^2)^n = x^{2n}$  n'ont rien en commun.

La suite  $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  est tout simplement une suite extraite de  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 0.



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

Exemple 16 :

Si  $x \in ]-1; 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0$ .

On remarquera bien que la suite  $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas géométrique,  $x^{2^n}$  et  $(x^2)^n = x^{2n}$  n'ont rien en commun.

La suite  $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  est tout simplement une suite extraite de  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 0.

Exercice 9 :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \frac{n}{9} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$ .

- ① Étudier les limites des suites extraites  $(u_{9n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{(3n+1)^2})_{n \in \mathbb{N}}$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

Exemple 16 :

Si  $x \in ]-1; 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0$ .

On remarquera bien que la suite  $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas géométrique,  $x^{2^n}$  et  $(x^2)^n = x^{2n}$  n'ont rien en commun.

La suite  $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  est tout simplement une suite extraite de  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 0.

Exercice 9 :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \frac{n}{9} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$ .

- 1 Étudier les limites des suites extraites  $(u_{9n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{(3n+1)^2})_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 2 Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

#### Théorème 15 :

Si les deux sous-suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite  $\ell$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .



## II. Comportement asymptotique des suites

### 5. Suites extraites

#### Théorème 15 :

Si les deux sous-suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite  $\ell$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

**Remarque** : On peut facilement prolonger ce résultat à toute famille de suites extraites dont les indices forment une partition de  $\mathbb{N}$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

- 1 Suites numériques
- 2 Comportement asymptotique des suites
- 3 Théorèmes d'existence de limites**
  - Théorème d'encadrement
  - Théorème de la limite monotone



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

**Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites réelles et  $l \in \mathbb{R}$ .

**Théorème d'encadrement :**

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = l$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, m_n \leq u_n \leq M_n$ ,  
alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .





# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

**Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites réelles et  $l \in \mathbb{R}$ .

**Théorème d'encadrement :**

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = l$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, m_n \leq u_n \leq M_n$ ,  
alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

**Théorème de minoration :** Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, m_n \leq u_n$ ,  
alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

**Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites réelles et  $l \in \mathbb{R}$ .

**Théorème d'encadrement :**

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = l$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, m_n \leq u_n \leq M_n$ ,  
alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

**Théorème de minoration :** Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, m_n \leq u_n$ ,  
alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

**Théorème de majoration :** Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq M_n$ ,  
alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

### ATTENTION

Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges.

Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite.

Or, dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$  sont réputées exister au départ et l'existence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  en découle.



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Exercice 10 :

On considère la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

- ① Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Exercice 10 :

On considère la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

- 1 Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ .
- 2 Que dire de la convergence de  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Proposition 17 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas



### III. Théorèmes d'existence de limites

#### 1. Théorème d'encadrement

Proposition 17 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Exemple 17 (Le grand classique) :

Si  $x \in ]-1; 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ .

$$\text{D'où, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Corollaire 17.1 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

- Si  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .





# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Corollaire 17.2 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

- Si  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- Si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Corollaire 17.3 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

- Si  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- Si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si  $q = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Corollaire 17.4 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

- Si  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- Si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si  $q = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$ .
- Si  $q \leq -1$  et  $u_0 \neq 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite.



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Le **théorème (16)** d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 17.5 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ .



### III. Théorèmes d'existence de limites

#### 1. Théorème d'encadrement

Le **théorème (16)** d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 17b (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ .

Exercice II :

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes strictement positifs.

On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  converge vers  $\ell$ .

① Montrer que si  $0 < \ell < 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Le **théorème (16)** d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 17.7 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ .

Exercice II :

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes strictement positifs.

On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  converge vers  $\ell$ .

- 1 Montrer que si  $0 < \ell < 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
- 2 Montrer que si  $\ell > 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

### III. Théorèmes d'existence de limites

#### 1. Théorème d'encadrement

Le **théorème (16)** d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 17.8 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ .

Exercice II :

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes strictement positifs.

On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  converge vers  $\ell$ .

- 1 Montrer que si  $0 < \ell < 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
- 2 Montrer que si  $\ell > 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- 3 Déterminer deux suites de nature différente dans le cas où  $\ell = 1$ .

### III. Théorèmes d'existence de limites

#### 1. Théorème d'encadrement

Le **théorème (16)** d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 17.9 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ .

Exercice II :

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes strictement positifs.

On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  converge vers  $\ell$ .

- 1 Montrer que si  $0 < \ell < 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
- 2 Montrer que si  $\ell > 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- 3 Déterminer deux suites de nature différente dans le cas où  $\ell = 1$ .
- 4 Déterminer la nature des suites  $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  (où  $a > 0$ ) et de  $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 1. Théorème d'encadrement

Les résultats de l' **exercice (11)** sont à retenir :

Corollaire 17.10 (Comparaison exponentielle/factorielle) :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

- ① Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

- 1 Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
- 2 Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

- ① Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
- ② Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

- ① Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
- ② Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

### Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

- ① Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
- ② Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers  $\pm\infty$ .

Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

### Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

- 1 Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
- 2 Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers  $\pm\infty$ .  
Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite mais seulement que c'est sa borne supérieure.



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

### Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

- 1 Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
- 2 Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

#### ATTENTION

Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite  $\ell$  mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par  $M$  alors  $\ell \leq M$  et si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par  $m$  alors  $\ell \geq m$ .

La suite a une infinité de majorants ou de minorants suivant les cas mais un seul est sa limite.

La question et la difficulté sont de la trouver.





# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

Exemple 18 :

La suite définie par  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$  est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1.

Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple.



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

La réciproque de ce théorème est fautive : si une suite diverge vers  $+\infty$ , elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par  $u_n = n + (-1)^n$  pour s'en convaincre.

**ATTENTION**



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

La réciproque de ce théorème est fautive : si une suite diverge vers  $+\infty$ , elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par  $u_n = n + (-1)^n$  pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers  $+\infty$  si on enlève la condition « non majorée ».

**ATTENTION**



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

La réciproque de ce théorème est fautive : si une suite diverge vers  $+\infty$ , elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par  $u_n = n + (-1)^n$  pour s'en convaincre.

### ATTENTION

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers  $+\infty$  si on enlève la condition « non majorée ».

Enfin, il n'est pas nécessaire d'être monotone pour converger comme la suite définie par  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $n > 0$ .



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

À retenir :

Toutes les suites ne sont pas monotones. Dans ce cas, on tentera d'utiliser le **théorème** (16) de comparaison et d'encadrement qui reste un outils extrêmement puissant, l'inégalité des accroissements finis ou les questions de l'énoncé...



# III. Théorèmes d'existence de limites

## 2. Théorème de la limite monotone

Exercice 12 :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lfloor 2^k \sqrt{2} \rfloor}{3^k}$ .

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

