Suites récurrentes

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 19

Sommaire I

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».

Mais elles se font refouler à l'entrée...[1]

[1]. Un peu d'humour qui se mérite. Vous comprendrez dans ce chapitre.

I. Suites adjacentes

I. Suites adjacentes

Définition 1 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Définition 1 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

I. Suites adjacentes

Définition 1 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

I. Suites adjacentes

Définition 1 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

I. Suites adjacentes

Définition 1 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Deux telles suites ne peuvent avoir un comportement quelconque.

Lemme 1 :

Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ remplissant les conditions de la définition (1) .

Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Théorème 1 :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite ℓ. [2]

[2]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

I. Suites adjacentes

1. Théorème des suites adjacentes

Théorème 1 :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite ℓ. [2]

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

[2]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

I. Suites adjacentes

1. Théorème des suites adjacentes

Théorème 1 :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite ℓ. [2]

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

Le théorème (1) a de nombreuses applications. La proposition (2) et la proposition (3) en sont deux importantes :

[2]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

Exercice 1 :

Montrer que les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

En déduire que $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Proposition 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

I. Suites adjacentes
2. Approximation décimale

Proposition 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Le décimal a_n est appelé approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près.

Proposition 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Le décimal a_n est appelé approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près.

Exemple 1 :

Si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3,141$ et $b_3 = 3,142$.

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

I. Suites adjacentes

3. Dichotomie

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
    - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
    - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La proposition (3) peut être vue comme une démonstration séquentielle du théorème de Bolzano.

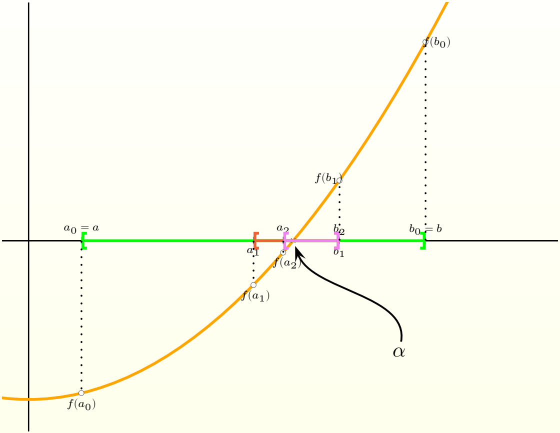


Figure 1 – Méthode par dichotomie

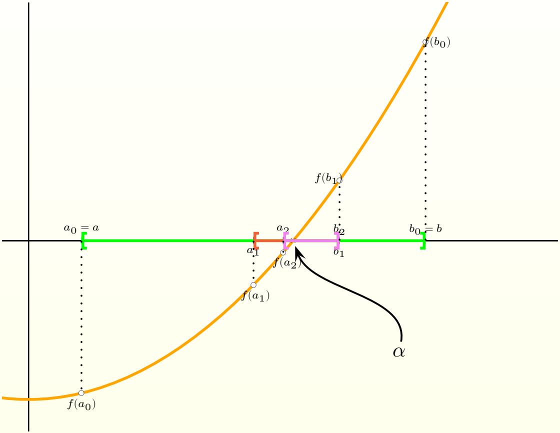


Figure 1 – Méthode par dichotomie

Remarque : a_n est une valeur approchée de α par défaut à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près, b_n est une valeur approchée par excès.

```python
def dichotomie (f,a,b,epsilon): # f continue et f(a)*f (t) <=0
                                # avec a<b
        while b-a >= epsilon:
                milieu = (a+i)/2
                if f(a)*f(milieu) <= 0: # f s'annule dans la
                                        # première moitié
                        b = milieu
                else :
                        a = milieu      # f s'annule dans la
                                        # deuxième moitié
        return (a+i)/2.
```

Figure 2 – Dichotomie en *Python*

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0,375$ à $0,125$ près.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0,375$ à $0,125$ près.

On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée.

Exemple 2 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0,375$ à $0,125$ près.

On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée.

Remarque : Pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{\ln\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \leqslant n$$

II. Suites récurrentes

Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f, et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

II. Suites récurrentes

Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f, et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

Notons par exemple f la fonction $x \longmapsto 2 + \sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty\,;2]$ et posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme $u_0 \in]-\infty\,;2]$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) = 3$, mais ensuite ???? Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ici pas définie.

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0\,;1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1-u_n)u_n,\ \mu \in [0\,;1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

II. Suites récurrentes

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0\,;1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1-u_n)u_n,\ \mu \in [0\,;1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Ce théorème donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f, c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

II. Suites récurrentes

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0\,;1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1-u_n)u_n, \ \mu \in [0\,;1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Ce théorème donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f, c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Il fait partie des premiers exemples remarquables de la théorie des systèmes dynamiques, introduisant la notion de chaos. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-*cycle implique chaos*

II. Suites récurrentes

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0\,;1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1-u_n)u_n,\ \mu \in [0\,;1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Ce théorème donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f, c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Il fait partie des premiers exemples remarquables de la théorie des systèmes dynamiques, introduisant la notion de chaos. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-*cycle implique chaos*

Il faut comprendre par là que toute fonction continue présentant un cycle de période 3 *admet un cycle de période n pour tout entier n.*

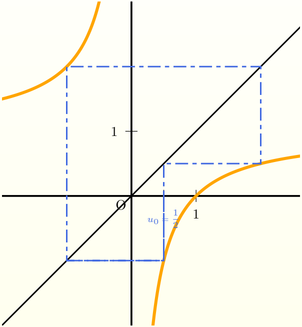


Figure 3 – $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

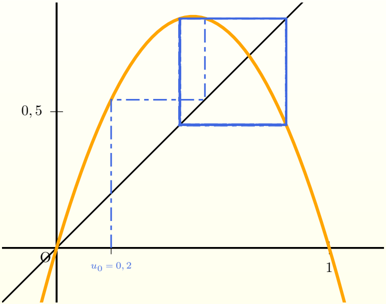


Figure 4 – $u_{n+1} = 3,4u_n(1 - u_n)$ avec $u_0 = 0,2$.

Figure 5 – Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un cycle.

II. Suites récurrentes

Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?

Dans tout cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

II. Suites récurrentes

Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?

Dans tout cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

II. Suites récurrentes

Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?

Dans tout cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

II. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \longmapsto x$.

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \longmapsto x$.
- On place le point $(u_0\,;0)$.

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \longmapsto x$.
- On place le point $(u_0\,;0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de $\mathcal{C}_f$.

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \longmapsto x$.
- On place le point $(u_0\,;0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de $\mathcal{C}_f$.
- On reporte le $(u_1\,;0)$ à l'aide la bissectrice.

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \longmapsto x$.
- On place le point $(u_0\,;0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de $\mathcal{C}_f$.
- On reporte le $(u_1\,;0)$ à l'aide la bissectrice.
- On itère le procédé ...

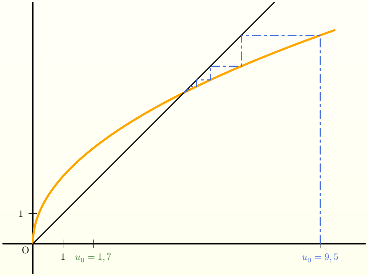


Figure 6 – $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 2$ et $u_0 = 9,5$.

Figure 8 – Exemples de suites convergentes

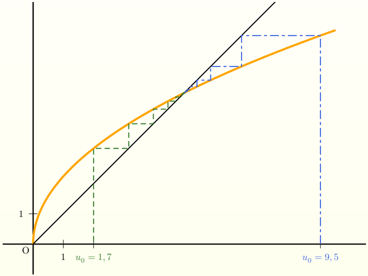


Figure 6 – $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 2$ et $u_0 = 9,5$.

Figure 8 – Exemples de suites convergentes

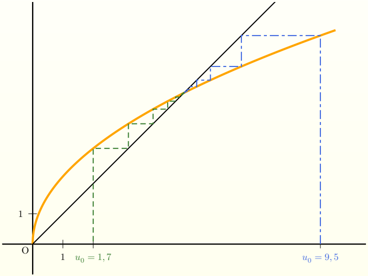


Figure 6 – $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 2$ et $u_0 = 9,5$.

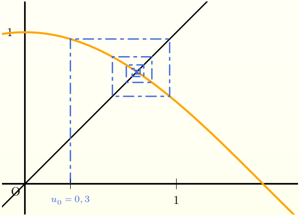


Figure 7 – $u_{n+1} = \cos(u_n)$ avec $u_0 = 0,3$.

Figure 8 – Exemples de suites convergentes

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (II) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$.

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (II) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$

II. Suites récurrentes
2. Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (II) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$
3. $u_0 \in \mathrm{I}$

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (II) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$
3. $u_0 \in \mathrm{I}$

Un tel intervalle est appelé intervalle de stabilité.

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (II) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$
3. $u_0 \in \mathrm{I}$

Un tel intervalle est appelé intervalle de stabilité.

Remarque : Trouver un segment $[a\,;b]$ sera notre saint graal.

Définition 2 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Définition 2 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ est stable par f si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,

Définition 2 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Définition 2 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f, d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

II. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Définition 2 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ est stable par f si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f, d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Proposition 4 (Existence de la suite) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f.

Si $u_0 \in \mathrm{I}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathrm{I}$.

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	0	8	$+\infty$
f	0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	0	8	$+\infty$
f	0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[0\,;8]$.

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	0	8	$+\infty$
f	0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[0\,;8]$, $[-1\,;8]$.

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	0	8	$+\infty$
f	0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[0\,;8]$, $[-1\,;8]$, $[0\,;+\infty[$.

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	0	8	$+\infty$
f	0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[0\,;8]$, $[-1\,;8]$, $[0\,;+\infty[$ ou $[-1\,;+\infty[$.

II. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	0	8	$+\infty$
f	0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[0\,;8]$, $[-1\,;8]$, $[0\,;+\infty[$ ou $[-1\,;+\infty[$ mais pas $[-1\,;0]$ ou $[8\,;+\infty]$.

Proposition 5 :

Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on considère le nombre $\delta(x) = f(x) - x$.

1. Si, $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $\delta(x) \geqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exemple 4 :

Reprenons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l' **exemple** (3) .

On a $\delta(x) = \sqrt{1+x} - x = \dfrac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x} = \dfrac{\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1+x}+x}$.

x	0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		8
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Proposition 5 :

Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on considère le nombre $\delta(x) = f(x) - x$.

1. Si, $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $\delta(x) \geqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si, $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $\delta(x) \leqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple 4 :

x	0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		8
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Comme on a choisi $\mathrm{I} = [0\,;8]$, la quantité $\delta(x)$ n'est pas de signe constant sur I. On ne peut pas utiliser cette propriété.

On aurait pu si on avait opté pour les intervalles de stabilité $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;8\right]$ ou $\left[0\,;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ plutôt que $[0\,;8]$.

Proposition 6 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :

Proposition 6 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
  - Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Proposition 6 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
  - Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition 6 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
  - Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition 6 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
  - Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

ATTENTION

Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

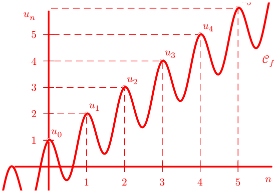
f(dé)croissante $\cancel{\Longrightarrow}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \\ &= u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, f ne l'est pas le moins du monde.



Exemple 5 :

Reprenons encore l' **exemple** (3) .

1. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0\,;8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exemple 5 :

Reprenons encore l' **exemple** (3) .

1. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0\,;8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Comme de plus $v_0 = 8$ et $v_1 = 3$, on en conclut que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple 5 :

Reprenons encore l' **exemple** (3) .

1. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0\,;8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Comme de plus $v_0 = 8$ et $v_1 = 3$, on en conclut que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Comme par ailleurs elle est minorée par 0, on peut en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \longmapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \longmapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:
   - si $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \longmapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:
   - si $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
   - si $g(u_1) - u_1 \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$), $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \longmapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:
   - si $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
   - si $g(u_1) - u_1 \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$), $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

ATTENTION

Dans le cas où $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.

Rappel (Point fixe) :

Soit une fonction f définie sur un ensemble I.

On appelle point fixe de f sur I tout réel $x \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

II. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Rappel (Point fixe) :

Soit une fonction f définie sur un ensemble I.

On appelle point fixe de f sur I tout réel $x \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Proposition (Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur I} \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in \mathrm{I} \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

II. Suites récurrentes
4. Convergence et point fixe

Proposition 7 (Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur I} \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in \mathrm{I} \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger.

Proposition 7 (Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur I} \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in \mathrm{I} \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger.

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f, on étudie les points d'annulation de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ sur I.

II. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Proposition 7 (Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur I} \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in \mathrm{I} \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger.

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f, on étudie les points d'annulation de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ sur I.

ATTENTION

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

II. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

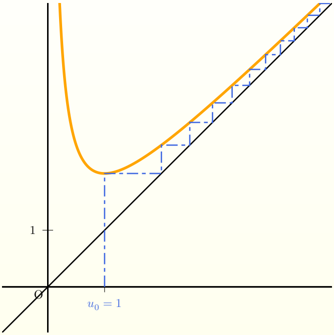


Figure 9 – $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.

f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

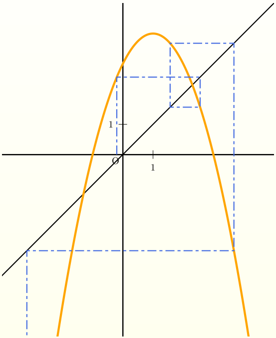


Figure 10 – $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0,2$.

f a deux points fixes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Figure 11 – Exemples de suites divergentes

ATTENTION

Si f n'est pas continue, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément vers un point fixe de f.

Soient $f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4} & \text{si } x\in\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x\in\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right] \end{cases} \end{array}$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f.

Exemple 6 :

Revenons à l' **exemple** (3) .

- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0\,;8]$.

Exemple 6 :

Revenons à l' **exemple** (3) .

- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0\,;8]$.
- Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{1+\ell} = \ell$.

  D'où $1+\ell = \ell^2$ et $\ell \geqslant 0$. Finalement, on obtient $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exemple 6 :

Revenons à l' exemple (3) .

- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0\,;8]$.
- Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{1+\ell} = \ell$.

  D'où $1+\ell = \ell^2$ et $\ell \geqslant 0$. Finalement, on obtient $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g. Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.
  La réciproque est fausse : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f.

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g. Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.
  La réciproque est fausse : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f.

Contre-Exemple 7 :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g. Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.
  La réciproque est fausse : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f.

Contre-Exemple 7 :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

- Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y converge aussi. À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Définition 3 (Fonction contractante) :

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **contractante sur I** si f est k-lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

Définition 3 (Fonction contractante) :

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **contractante sur I** si f est k-lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est dérivable sur I et telle que $|f'| \leqslant k < 1$ sur I alors f y est contractante.

Définition 3 (Fonction contractante) :

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **contractante sur I** si f est k-lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est dérivable sur I et telle que $|f'| \leqslant k < 1$ sur I alors f y est contractante.

Théorème 8 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f.

Alors, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n\, |u_0 - \ell|\,. \tag{1}$$

Théorème 8 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f.

Alors, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n\, |u_0 - \ell|\,. \tag{1}$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

Théorème 8 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f.

Alors, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n \, |u_0 - \ell| . \quad (1)$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (**??**).

Théorème 8 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f.

Alors, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n\, |u_0 - \ell|\,. \tag{1}$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (**??**).

Calcul approché du point fixe : Le terme u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $k^n|u_0 - \ell|$. La méthode sera d'autant plus efficace que l'on aura bien choisi u_0.

ATTENTION

Bien remarquer que la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. une **hypothèse** dans la proposition (7) .

ATTENTION

Bien remarquer que la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. une **hypothèse** dans la proposition (7) .
2. une **conclusion** dans le théorème (**??**).

Exercice 3 :

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{5+2u_n} \end{cases}$.

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{J} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{J} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{J} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{J} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

1. I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la proposition (4) .

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{J} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

   1. I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la proposition (4) .
   2. I est un segment $[a\,;b]$ *i.e.* fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la proposition (5) .

II. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la proposition (5) .

   On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la proposition (5) .

   On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

   Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la proposition (5) .

   On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

   Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

3. I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de f. C'est le contenu de la proposition (7) et du théorème (??).
   S'il n'en contient pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in \mathrm{I}$, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in \mathrm{I}$, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4.
   1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
      Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

      ATTENTION

      - La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
      - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

   2. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

   ATTENTION

   - La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

   2. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.
   Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0.

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

   ATTENTION

   - La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

   2. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.
   Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0.

   ATTENTION

   - La fonction f n'est pas nécessairement contractante !

II. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

   ATTENTION
   - La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

   2. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.
   Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0.

   ATTENTION
   - La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
   - La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !

II. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. 1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in \mathrm{I}$, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

2. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.
   Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4.
   1. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
      Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le théorème (??) directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

   2. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.
      Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !

Exemples : $f(x) = x^2$ n'est pas contractante sur $[0\,;1]$, elle a plusieurs poi

fixes (deux), et les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont décroissantes.

❹

❸ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

❹ ❸ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !

❹ ❸ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

4

3. Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

4

3. Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f\circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❹ ❸ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f\circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

❹ ❸ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.
  En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

❹ ❸ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.
  En général, vous rencontrerez deux cas de figure :
  - les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

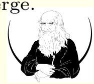
❹ ❸ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f\circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.
  En général, vous rencontrerez deux cas de figure :
  - les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  - les sous-suites convergent vers deux points fixes différents : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.



II. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

❹

❹ Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu ... faire preuve de jugeotte et d'initiatives ... Étudier le signe de $f(x) - x$, ...L'énoncé vous aidera !

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0;1] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0;1] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0;1] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 .

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0;1] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 .
4. Supposons maintenant $a < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

III. Suites récurrentes linéaires

III. Suites récurrentes linéaires

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n,$$

où a_0, a_1, ... a_{p-1} sont p scalaires fixés de K, a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n,$$

où a_0, a_1, ... a_{p-1} sont p scalaires fixés de K, a_0 non nul).
Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques.

III. Suites récurrentes linéaires

Exemple 8 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{U}_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{U}_0$. Le problème semble alors terminé.

Exemple 8 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{U}_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{U}_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n......

Exemple 8 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{U}_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{U}_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n......

Vous étudierez ces suites, liées à la réduction des endomorphismes, plus en détail l'année prochaine.

III. Suites récurrentes linéaires

Définition 3 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) :

On appelle récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad (a\,;b) \in \mathbb{K}^2. \tag{2}$$

Définition 3 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) :

On appelle **récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad (a\,;b) \in \mathbb{K}^2. \tag{2}$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

III. Suites récurrentes linéaires

Définition 3 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) :

On appelle récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad (a\,;b) \in \mathbb{K}^2. \tag{2}$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

Définition 4 (Équation caractéristique) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (2).

On appelle équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Théorème 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

Théorème 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n,$$

avec $a,b\in\mathbb{C}$, $b\neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta\neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{C}^2\ \text{ tel que }\ \forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=\lambda {r_1}^n+\mu {r_2}^n.$$

2. Si $\Delta=0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{C}^2\ \text{ tel que }\ \forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\lambda+\mu n)r^n.$$

III. Suites récurrentes linéaires

1. Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

Remarque : L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

III. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose ici que $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une suite à valeurs réelles.

Théorème 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

III. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Théorème 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

Théorème 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors
$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$
2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors
$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$
3. Si $\Delta < 0$ et $r\,\mathrm{e}^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors
$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \Big(\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n)\Big)\, r^n.$$

Exemple 9 (Suite de Fibonnacci) :

Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Exemple 9 (Suite de Fibonnacci) :

Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Exemple 9 (Suite de Fibonnacci) :

Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

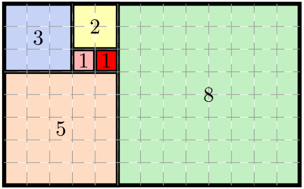
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire $F_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$ puis, avec les conditions initiales qui imposent

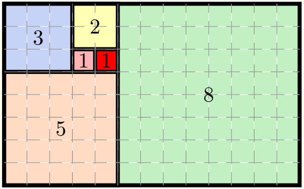
$\lambda = -\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n).$$

Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



On est ainsi conduit à la célèbre séquence des nombres de Fibonacci :

1 1 2 3 5 8 13 ...

Exercice 5 :

Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que $\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.