Mathématiques 4

Vendredi 23 aout 2024

Durée : **4** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.

Exercice 1 : On se propose de trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x) \tag{E}$$

Soit f une fonction vérifiant la relation (E).

1. Montrer que l'on a $f(0) = 0$.

2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{f(h)}{h}\,\mathrm{e}^x + \dfrac{(\mathrm{e}^h - 1)}{h} f(x)$.

3. On pose $a = f'(0)$. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et que $f'(x) - f(x) = a\,\mathrm{e}^x$.

4. Résoudre l'équation différentielle précédente puis en déduire la forme de f.

5. Étudier la réciproque.

Problème 1 (Matrices) :

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.

Partie I : Un peu de calculs

1. Calculer N et N^2 puis vérifier que $\mathrm{N}^3 = 0_3$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathscr{S}_\lambda = \left\{ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \right\}$.

   a. Pour $\lambda \neq 1$, déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_\lambda$.

   b. Déterminer $\mathscr{S}_1$.

Méthode 1, par le binôme de Newton

3. À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

4. Préciser A^5.

Méthode 2, par la division euclidienne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on admet l'existence de trois réels $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ et d'un polynôme Q_n tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^n = (x-1)^3 \mathrm{Q}_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$n x^{n-1} = 3(x-1)^2 \mathrm{Q}_n(x) + (x-1)^3 \mathrm{Q}_n'(x) + 2a_n x + b_n.$$

   Puis,

$$n(n-1)x^{n-2} = 6(x-1)\mathrm{Q}_n(x) + 6(x-1)^2 \mathrm{Q}_n'(x) + (x-1)^3 \mathrm{Q}_n''(x) + 2a_n.$$

6. En déduire, pour $n \geqslant 2$ que :

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2},\ b_n = -n(n-2) \text{ et } c_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

$\boxed{7}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de A^n en fonction de n, A et A^2.

$\boxed{8}$ Retrouver la valeur de A^5.

Partie II : Racines carrées de T

On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = T - I_3$.

On s'intéresse à déterminer l'ensemble des racines carrées de T :

$$\mathscr{R}_T = \{S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid S^2 = T\}.$$

Pour ce faire, on pose également $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des matrices commutant avec T :

$$\mathscr{C}_T = \{S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TS = ST\}.$$

On admet que $\mathscr{C}_T = \{aI_3 + bM + cM^2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

$\boxed{9}$ Calculer M^2 et M^3.

$\boxed{10}$ Montrer que $\mathscr{R}_T \subseteq \mathscr{C}_T$.

$\boxed{11}$ En déduire que pour toute matrice S de $\mathscr{R}_T$, il existe un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$S^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{12}$ Montrer que $\mathscr{R}_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Partie III : Racines carrées de A

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{13}$ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

$\boxed{14}$ Calculer $P^{-1}AP$.

On considère $\mathscr{R}_A = \{B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A\}$.

$\boxed{15}$ Montrer que $B \in \mathscr{R}_A$ si et seulement si $S = P^{-1}BP \in \mathscr{R}_T$.

$\boxed{16}$ À l'aide du résultat de la question $\boxed{12}$, en déduire $\mathscr{R}_A$.

Problème 2 (Continuité - Dérivabilité) :

Partie I : Un résultat de concavité

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ et $g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a\,;b]$ et deux fois dérivable sur $]a\,;b[$.

On suppose que pour tout $x \in]a\,;b[$, $g''(x) \geqslant 0$ et on note :

$$\forall\, x \in]a\,;b[\,, \quad \tau_{g,a}(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

1 Justifier que $\tau_{g,a}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$ et calculer sa dérivée.

2 Soit $x \in]a\,;b[$. Montrer qu'il existe $c_x \in]a\,;x[$ tel que $\tau'_{g,a}(x) = \dfrac{g'(x) - g'(c_x)}{x - a}$.

3 Conclure que $\tau_{g,a}$ est croissante sur $]a\,;b[$.

Partie II : Une application

On pose $g : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x^2) \end{array}$ et $f : \begin{array}{ccc}]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\arcsin(x^2)}{x} \end{array}$.

4 Montrer soigneusement que la fonction g vérifie les hypothèses de la **partie I** sur $[0\,;1]$ et donner l'expression de $\tau_{g,0}(x)$ pour tout $x \in]0\,;1[$.

5 Démontrer que f est croissante sur $]0\,;1[$.

6 Déterminer la dérivée de f sur $]0\,;1[$.

7 En déduire que pour tout $t \in]0\,;1[$, $\arcsin(t) \leqslant \dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$.

8 Montrer que pour tout $x \in]0\,;1[$, $f'(x) \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$.

9 Montrer que f est $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$-lipschitzienne sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Partie III : Une fonction par morceaux

On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [-1\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\arcsin(x^2)}{x} & \text{si } x \in]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in [-1;0[. \end{cases} \end{array}$$

10 Justifier que φ est continue sur $[-1\,;1]$.

11 Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.