Mathématiques

Commentaires : *Arrêtez de me balancer des composées partout. Ce n'est pas la solution miracle et cela vous occulté les vrais problèmes !*

Exercice 1 :

1. La relation (E) pour $x = y = 0$ donne $f(0) = 2f(0)$ soit $f(0) = 0$.

2. D'après la relation (E), $f(x+h) = \mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x)$.

   Ainsi $f(x+h) - f(x) = \mathrm{e}^x f(h) + \left(\mathrm{e}^h - 1\right) f(x)$ puis

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h}\, \mathrm{e}^x + \frac{\left(\mathrm{e}^h - 1\right)}{h} f(x) \tag{XVI.1}$$

3. Puisque $f(0) = 0$, $\dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0}$.

   Comme f est dérivable en 0 par hypothèse, son taux d'accroissement en 0 admet une limite finie lorsque h tend vers 0 qui est $f'(0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0) = a.$$

   De plus, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \left(\mathrm{e}^x\right)'(0) = 1$.

   On en déduit que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ de f en x admet une limite finie, ce qui prouve que f est dérivable en x. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   Par passage à la limite sur h en 0 dans (XVI.1), on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a + f(x) \iff f'(x) - f(x) = a\,\mathrm{e}^x.$$

   Commentaires : *f était seulement dérivable en 0 et pas sur $\mathbb{R}$. Sa dérivabilité était justement le thème de la question.*

4. La forme générale des solutions de l'équation homogène est $y_{\mathrm{H}}(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^x, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

   On cherche maintenant une solution particulière de notre équation différentielle de la forme $x \longmapsto \mathrm{C}x\,\mathrm{e}^x$.

   Après un petit calcul, la fonction de la forme précédente est solution de notre équation différentielle si, et seulement si $\mathrm{C} = a$.

   Ainsi $x \longmapsto y_{\mathrm{P}}(x) = ax\,\mathrm{e}^x$ est une solution particulière, et $f(x) = (ax + \mathrm{A})\,\mathrm{e}^x$.

   Finalement, comme $f(0) = 0$, nous avons $\mathrm{A} = 0$.

   Ainsi, si f vérifie la relation (E), nécessairement $f(x) = ax\,\mathrm{e}^x$.

5. Réciproquement, toute fonction de la forme précédente vérifie la relation (E).

   Finalement, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solution de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \mathrm{A}x\,\mathrm{e}^x,\ \mathrm{A} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Problème 1 (Matrices) :

Partie I : Un peu de calculs

1 On a les égalités suivantes :

$$\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Puis,

$$\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin,

$$\mathrm{N}^3 = \mathrm{N}\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{N}^3 = 0_3$$

La matrice N est donc nilpotente d'indice 3.

2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathscr{S}_\lambda &\iff \mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ -x + 2y - z \\ -2x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (2-\lambda)x + y + z & = & 0 \\ -x + (2-\lambda)y - z & = & 0 \\ -2x - (1+\lambda)z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + (2-\lambda)y - z & = & 0 \\ (2-\lambda)x + y + z & = & 0 \\ -2x - (1+\lambda)z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + (2-\lambda)\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} -x + (2-\lambda)y - z & = & 0 \\ \left(1 + (2-\lambda)^2\right) y + (1 - (2-\lambda))z & = & 0 \\ -2(2-\lambda)y + (-1 - \lambda + 2)z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + (2-\lambda)y - z & = & 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)z & = & 0 \\ 2(\lambda - 2)y - (\lambda - 1)z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} -x + (2-\lambda)y - z & = & 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)z & = & 0 \\ \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) y & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + (2-\lambda)y - z & = & 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)z & = & 0 \\ (\lambda - 1)^2 y & = & 0. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Commentaires : *Il ne peut pas rester des inconnues principales dans le second membre.*

(a) Soit $\lambda \neq 1$. Alors,

$$\mathrm{X} \in \mathscr{S}_\lambda \iff \begin{cases} -x-z &= 0 \\ (\lambda-1)z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x-z &= 0 \\ z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{car } \lambda \neq 1$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

(b) Soit $\lambda = 1$. Alors,

$$\mathrm{X} \in \mathscr{S}_1 \iff \begin{cases} -x+y-z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x-z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= 0 \\ z &= z \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Méthode 1, par le binôme de Newton

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de N, on sait que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}$.

De plus, $\mathrm{N}^3 = 0_3$ donc pour tout $k \geqslant 3$, $\mathrm{N}^k = 0_3$.

Or, N et I_3 commutent. Donc par la formule du binôme de Newton, on a

$$\mathrm{A}^n = (\mathrm{I}_3 + \mathrm{N})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k \mathrm{I}_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k.$$

Si $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{A}^n = \binom{n}{0}\mathrm{N}^0 + \binom{n}{1}\mathrm{N} + \binom{n}{2}\mathrm{N}^2 + 0_3 = \mathrm{I}_3 + n\mathrm{N} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{N}^2.$$

On note que cette formule reste vraie si $n = 0$ ou $n = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + (n^2-n) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+2n-n^2 & n^2 & 2n-n^2 \\ -n & n+1 & -n \\ n^2-3n & n-n^2 & n^2-3n+1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1+2n-n^2 & n^2 & 2n-n^2 \\ -n & n+1 & -n \\ n^2-3n & n-n^2 & n^2-3n+1 \end{pmatrix}$$

Commentaires : *Comme je l'ai dit maintes fois, ma lecture de vos réponses n'a commencé qu'à partir du mot « commutativité ». S'il n'y était pas, point de lecture ni de points.*

4 En particulier, pour $n = 5$, on a

$$\mathrm{A}^5 = \begin{pmatrix} 1+10-25 & 25 & 10-25 \\ -5 & 6 & -5 \\ 25-15 & 5-25 & 25-15+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\mathrm{A}^5 = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2, par la division euclidienne

5 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Les fonctions $x \longmapsto x^n(x-1)^3, x \longmapsto \mathrm{Q}_n(x)$ et $x \longmapsto ax^2+bx+c$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad nx^{n-1} = 3(x-1)^2\mathrm{Q}_n(x) + (x-1)^3\mathrm{Q}_n'(x) + 2a_nx + b_n.$$

En dérivant une seconde fois, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} n(n-1)x^{n-2} &= 6(x-1)\mathrm{Q}_n(x) + 3(x-1)^2\mathrm{Q}_n'(x) + 3(x-1)\mathrm{Q}_n'(x) + (x-1)^3\mathrm{Q}_n''(x) + 2a_n \\ &= 6(x-1)\mathrm{Q}_n(x) + 6(x-1)^2\mathrm{Q}_n'(x) + (x-1)^3\mathrm{Q}_n''(x) + 2a_n \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} nx^{n-1} &= 3(x-1)^2\mathrm{Q}_n(x) + (x-1)^3\mathrm{Q}_n'(x) + 2a_nx + b_n \\ n(n-1)x^{n-2} &= 6(x-1)\mathrm{Q}_n(x) + 6(x-1)^2\mathrm{Q}_n'(x) + (x-1)^3\mathrm{Q}_n''(x) + 2a_n \end{aligned}$$

Commentaires : *Encore une fois, sur des questions aussi simples, on vous demande plus que des affirmations de terminale. Pas de points si la dérivabilité n'est pas justifiée par une phrase, un mot, une lettre, un truc.*

6 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Par la question précédente, en prenant $x = 1$, dans les deux égalités on a

$$\begin{cases} n = 2a_n + b_n \\ n(n-1) = 2a_n \end{cases} \iff \begin{cases} n = 2a_n + b_n \\ a_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} b_n = n - 2a_n = n - n(n-1) = -n(n-2) \\ a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}. \end{cases}$$

Et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, x^n = (x-1)^3\mathrm{Q}_n(x) + a_nx^2 + b_nx + c_n$, en prenant $x = 1$ encore une fois, on obtient

$$\begin{aligned} & 1 = a_n + b_n + c_n = \frac{n(n-1)}{2} - n(n-2) + c_n \\ \iff \quad & c_n = n(n-2) - \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\ & \quad = \frac{2n^2-4n-n^2+n+2}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = \frac{n(n-1)}{2}, \ b_n = -n(n-2) \text{ et } c_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

7 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Par la relation $x^n = (x-1)^3 Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} A^n &= (A - I_3)^3\, Q_n(A) + a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 = \underbrace{N^3}_{0_3}\, Q_n(A) + a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 \\ &= a_n A^2 + b_n A + c_n I_3. \end{aligned}$$

Et d'après la question précédente,

$$A^n = \frac{n(n-1)}{2} A^2 - n(n-2)A + \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_3.$$

8 En particulier, pour $n = 5$, $A^5 = 10A^2 - 15A + 6I_3$.

Or,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^5 = 10 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 15 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 4 :

$$A^5 = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Racines carrées de T

9 Rapidement, on a :

$$M = T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

En particulier, $M^k = 0_3$ pour tout $k \geqslant 3$.

10 Soit $S \in \mathscr{R}_T$. Alors, par définition, $S^2 = T$. Par suite,

$$TS = S^2 S = S^3 = SS^2 = ST.$$

Donc $S \in \mathscr{C}_T$. Ceci étant vrai pour $S \in \mathscr{R}_T$ quelconque, on en déduit que :

$$\mathscr{R}_T \subseteq \mathscr{C}_T.$$

Commentaires : *C'est* S *qui doit commuter avec* T *et non* S^2.

11 Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{R}_{\mathrm{T}}$. Alors par la question précédente, on a $\mathrm{S} \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ et, d'après l'énoncé,

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{S} = a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{M} + c\mathrm{M}^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^2 &= \left(a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{M} + c\mathrm{M}^2\right)\left(a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{M} + c\mathrm{M}^2\right)\\ &= a^2\mathrm{I}_3 + ab\mathrm{M} + ac\mathrm{M}^2 + ab\mathrm{M} + b^2\mathrm{M}^2 + bc\mathrm{M}^3 + ac\mathrm{M}^2 + bc\mathrm{M}^3 + c^2\mathrm{M}^4\\ &= a^2\mathrm{I}_3 + 2ab\mathrm{M} + \left(b^2 + 2ac\right)\mathrm{M}^2 + 2bc\mathrm{M}^3 + c^2\mathrm{M}^4.\end{aligned}$$

D'après **9**, on a :

$$\begin{aligned}&= a^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + 2ab\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \left(b^2+2ac\right)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a^2 & 2ab & b^2+2ac\\ 0 & a^2 & 2ab\\ 0&0&a^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

12 Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{R}_{\mathrm{T}}$. D'après la question précédente, il suffit de résoudre le système

$$\begin{aligned}\mathrm{T} = \mathrm{S}^2 \iff& \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 & 2ab & b^2+2ac\\ 0 & a^2 & 2ab\\ 0&0&a^2\end{pmatrix}\\ \iff& \begin{cases} a^2 &= 1\\ 2ab &= 1\\ b^2+2ac &= 0\end{cases}\\ \iff& \begin{cases} a &= 1\\ b &= \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{4}+2c &= 0 \iff c = -\dfrac{1}{8}\end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a &= -1\\ b &= -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{4}-2c &= 0 \iff c = \dfrac{1}{8}\end{cases}\end{aligned}$$

Avec $\mathrm{S} = a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{M} + c\mathrm{M}^2$, on trouve finalement :

$$\iff \mathrm{S} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=\mathrm{S}_0} \quad \text{OU} \quad \mathrm{S} = \begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix} = -\mathrm{S}_0.$$

Ainsi,

$$\mathscr{R}_{\mathrm{T}} \subseteq \left\{\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Réciproquement, si $\mathrm{S} = \mathrm{S}_0 = \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{S}_0^2 = \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{T}.$$

De même, si $\mathrm{S} = -\mathrm{S}_0$, alors $\mathrm{S}^2 = (-\mathrm{S}_0)(-\mathrm{S}_0) = \mathrm{S}_0^2 = \mathrm{T}$.

Donc $\{\mathrm{S}_0; -\mathrm{S}_0\} \subseteq \mathscr{R}_\mathrm{T}$.

Conclusion, $\mathscr{R}_\mathrm{T}$ possède exactement deux éléments :

$$\mathscr{R}_\mathrm{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Partie III : Racines carrées de A

13 On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en procédant sur les lignes :

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathrm{P} & & \mathrm{I}_3 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{L}_2 \leftarrow 2\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \frac{1}{2}\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 & \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

On obtient donc que $\mathrm{P} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \mathrm{I}_3$, donc la matrice P est inversible et

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Commentaires : *On n'a pas oublié naturellement de vérifier son résultat :*

$$\mathrm{PP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3.$$

14 À l'aide de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &= \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{T}$.

15 Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Posons $\mathrm{S} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} \in \mathscr{R}_\mathrm{A} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{B}^2 = \mathrm{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^2\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}\right)\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}\right) = \mathrm{T} \quad \text{d'après la question précédente.} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{S}^2 = \mathrm{T} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{S} \in \mathscr{R}_\mathrm{T}.
\end{aligned}$$

16 Avec les notations de la questions précédentes, pour $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathrm{B} \in \mathscr{R}_\mathrm{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{S} \in \mathscr{R}_\mathrm{T}.$$

Donc, par la question **12** en posant $\mathrm{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} \in \mathscr{R}_\mathrm{A} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{S} = \mathrm{S}_0 \quad \text{OU} \quad \mathrm{S} = -\mathrm{S}_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{S}_0 \quad \text{OU} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = -\mathrm{S}_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{B} = \mathrm{PS}_0\mathrm{P}^{-1} \quad \text{OU} \quad \mathrm{B} = -\mathrm{PS}_0\mathrm{P}^{-1}.
\end{aligned}$$

Calculons,

$$\begin{aligned}
\mathrm{PS}_0\mathrm{P}^{-1} &= \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 3/2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\mathscr{R}_\mathrm{A} = \left\{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Commentaires : *Il est possible de contrôler son résultat en vérifiant que* $\mathrm{S}_0^2 = \mathrm{A}$.

Problème 2 (Continuité - Dérivabilité) :

Partie I : Un résultat de convexité

1. Par hypothèse, g est deux fois dérivable donc $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$. De plus, $x \longmapsto x-a$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$ en tant que fonction polynomiale et ne s'annule pas sur cet intervalle.

   Donc par quotient, $\tau_{g,a}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$.

   De plus, on a directement,
$$\forall\, x \in\,]a\,;b[\,, \quad \tau'_{g,a}(x) = \frac{g'(x)(x-a)-(g(x)-g(a))}{(x-a)^2}.$$

2. Soit $x \in\,]a\,;b[$. La fonction g est continue sur $[a\,;b]$ donc sur $[a\,;x]$. De plus g est deux fois dérivable sur $]a\,;b[$ donc dérivable sur $]a\,;x[$.

   Donc par l'identité des accroissements finis,
$$\exists c_x \in]\,a; x\,[, \quad g(x)-g(a) = g'\left(c_x\right)(x-a).$$
   Donc par la question précédente,
$$\tau'_{g,a}(x) = \frac{g'(x)(x-a)-(g(x)-g(a))}{(x-a)^2} = \tau'_{g,a}(x) = \frac{g'(x)(x-a)-g'\left(c_x\right)(x-a)}{(x-a)^2}$$
$$= \frac{g'(x)-g'\left(c_x\right)}{x-a} \quad \text{car } x \neq a.$$
   Conclusion,
$$\forall\, x \in\,]a\,;b[\,, \exists\, c_x \in\,]a\,;b[\,, \quad \tau'_{g,a}(x) = \frac{g'(x)-g'\left(c_x\right)}{x-a}.$$

3. Par hypothèse, g'' est positive sur $]a\,;b[$. Donc g' est croissante sur $]a\,;b[$.

   Soit $x \in\,]a\,;b[$. Alors avec les notations de la question précédente, $a < c_x < x$. Donc par croissance de g',
$$g'\left(c_x\right) \leqslant g'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x)-g'\left(c_x\right) \leqslant 0.$$
   Or $x-a>0$, donc
$$\tau'_{g,a}(x) = \frac{g'(x)-g'\left(c_x\right)}{x-a} \geqslant 0.$$
   Ceci étant vrai pour $x \in\,]a\,;b[$ quelconque, on en déduit que
$$\forall\, x \in]a; b\,[, \quad \tau'_{g,a}(x) \geqslant 0$$
   Conclusion, la fonction $\tau_{g,a}$ est croissante sur l'intervalle $]a\,;b[$.

Partie II : Une application

4. La fonction arcsin est continue sur $[-1\,;1]$ et deux fois dérivable sur $]-1\,;1[$. La fonction $c : x \longmapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $[0\,;1]$ ou $]0\,;1[$ suivant que l'on prend les bornes ou non.

   Donc par composée, g est continue sur $[0\,;1]$ et deux fois dérivable sur $]0\,;1[$.

   De plus, pour tout $x \in\,]0\,;1[$,
$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{2\sqrt{1-x^4} - \dfrac{2x\left(-4x^3\right)}{2\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4} = \frac{2\left(1-x^4\right)+4x^4}{\left(1-x^4\right)^{3/2}}$$
$$= \frac{2+2x^4}{\left(1-x^4\right)^{3/2}}.$$

On observe donc que :

$$\forall\, x \in \left]0\,;1\right[\,,\quad g''(x) \geqslant 0$$

Enfin, $\forall\, x \in \left]0\,;1\right[$, $\tau_{g,0}(x) = \dfrac{\arcsin\left(x^2\right) - \arcsin(0)}{x} = \dfrac{\arcsin\left(x^2\right)}{x} = f(x)$.

5 D'après la partie précédente, la fonction $\tau_{g,0} \,:\, x \longmapsto \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f(x)$ est donc croissante sur $\left]0\,;1\right[$.

6 Comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est dérivable sur $\left]0\,;1\right[$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \left]0\,;1\right[\,,\quad f'(x) &= \frac{\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}x - \arcsin\left(x^2\right)}{x^2}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2}.\end{aligned}$$

7 Par ce qui précède, la fonction f est croissante sur $\left]0\,;1\right[$ donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \left]0\,;1\right[\,,\quad f'(x) \geqslant 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall\, x \in \left]0\,;1\right[\,,\quad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2} \geqslant 0\\ &\Longrightarrow \quad \forall\, x \in \left]0\,;1\right[\,,\quad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} \geqslant \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2}\\ &\Longrightarrow \quad \forall\, x \in \left]0\,;1\right[\,,\quad \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} \geqslant \arcsin\left(x^2\right) \qquad \text{car } x^2 > 0.\end{aligned}$$

Posons $t = x^2$, alors quand x décrit $\left]0\,;1\right[$, t décrit $\left]0\,;1\right[$ et on obtient donc que :

$$\forall\, t \in \left]0\,;1\right[\,,\quad \arcsin(t) \leqslant \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

8 Soit $x \in \left]0\,;1\right[$. On sait que $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \dfrac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2}$.

Or, $\arcsin\left(x^2\right) > 0$ et $x^2 > 0$ donc $\dfrac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2} > 0$.

Conclusion,

$$\forall\, x \in \left]0\,;1\right[\,,\quad f'(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}.$$

9 Soit $x \in \left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Alors,

$$\begin{aligned}0 \leqslant x^4 \leqslant \frac{1}{4} \quad &\Longrightarrow \quad 1 \geqslant 1 - x^4 \geqslant 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\\ &\Longrightarrow \quad 1 \geqslant \sqrt{1-x^4} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} > 0\\ &\Longrightarrow \quad 2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} \leqslant \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &\Longrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\forall\, x \in \left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\,,\quad f'(x) \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Commentaires :

— *Attention, ce résultat seul ne suffit pas !*

— *Montrer que* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} f'(x) = \frac{4}{\sqrt{3}}$ *sans autre argument ne suffit pas non plus à montrer que* $f'(x) \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}$ *pour tout* x *de* $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

De plus, d'après la question 5, f est croissante donc f' est positive sur $]0\,;1[$ et en particulier sur $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

D'où,

$$\forall\, x \in \left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \quad |f'(x)| = f'(x) \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Enfin, soit $(x,y) \in \left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[^2$, $x \neq y$. Alors f est continue sur $[x\,;y]$ ou $[y\,;x]$ et dérivable sur $]x\,;y[$ ou $]y\,;x[$ donc par le théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{t\in]x;y[} |f'(t)|\,|x-y| \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}|x-y|,$$

ce qui reste vrai si $x = y$.

Conclusion, la fonction f est $\frac{4}{\sqrt{3}}$-lipschitzienne sur $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Partie III : Une fonction par morceaux

10 En reconnaissant le taux de variation en 0 de la fonction arcsin dérivable, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\arcsin(u)}{u} = 1$ puis $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} = 1 < \infty$.

D'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x \times \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \varphi(x) = \varphi(0) = 0$.

Par conséquent, φ est continue en 0.

Or, $x \longmapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ est continue sur $]0\,;1]$ (car la fonction arcsin l'est sur $[-1\,;1]$) et $x \longmapsto x$ est continue sur $[-1\,;0[$. Donc φ est aussi continue sur $[-1;0[$ et sur $]0\,;1]$.

Conclusion, la fonction φ est continue sur $[-1\,;1]$.

Commentaires : *Cessez de confondre « définie » et « continue ». C'est lassant à la fin et ça me fait mal au coude de tout barrer.*

11 La fonction φ est continue sur $]-1\,;1[$.

De plus $x \longmapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1[$ et $x \longmapsto x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;0[$. Donc φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1[$.

Enfin, regardons la limite de la dérivée en 0 :

En 0 par valeurs supérieures : $\forall\, x \in]0\,;1[\,, \varphi(x) = f(x)$ donc par la partie II,

$$\forall\, x \in]0\,;1[\,, \quad \varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x^2)}{x^2}.$$

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi'(x) = 2 - 1 = 1$.

En 0 par valeurs inférieures : Pour tout $x \in]-1\,;0[$, on a $(x)' = 1$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \varphi'(x) = 1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi'(x)$ *i.e.* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x)$ existe et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x) = 1$.

Il n'y a plus qu'à dérouler le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$: f est continue sur $]-1\,;1[$, $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1[$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x) = 1$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$ et on a $\varphi'(0) = 1$.