Accroissements finis et Suites récurrentes

Soit $g\colon \mathrm{D} \to \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \sqrt{2-\ln x}$.

1 Déterminer le domaine de définition D de la fonction g.

2 Donner les limites de g aux extrémités de D.

3 Dresser le tableau de variations complet de g en justifiant.

4 On note $\mathrm{I} = [1; \mathrm{e}]$. Justifier que $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

5 (a) Énoncer le théorème donnant l'inégalité des accroissements finis.

(b) Montrer que g est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur I.

6 Pour $x \in \mathrm{D}$, on note $h(x) = x^2 + \ln x - 2$. Grâce à l'étude de h, montrer que g admet un unique point fixe α puis que $\alpha \in \mathrm{I}$.

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = \sqrt{2-\ln x_n}$.

7 Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes appartiennent à I.

8 Si $n \in \mathbb{N}$, justifier que $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x_n - \alpha|$.

9 (a) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |x_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(b) Qu'en déduit-on sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

10 Déterminer $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que x_N soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

11 Écrire une fonction `valeur_approchee(k)` en langage Python renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-k} près (l'argument `k` est de type `int`). On pourra initialiser la suite en prenant $x_0 = 1$. Commenter la fonction de façon pertinente.