Suites récurrentes

I QCM

Une seule réponse exacte par question.

1 Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adjacente avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors

- a ☑ pour tout n, on a $v_n > 1$
- b ☐ pour tout n, on a $v_n - u_n \geqslant \frac{1}{n}$
- c ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 1$
- d ☐ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

2 Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite définie par $u_n = 2^n + 3^n$?

- a ☐ $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$
- b ☐ $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
- c ☐ $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$
- d ☑ $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

3 Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3$?

- a ☐ elle tend vers 1 en croissant
- b ☐ elle tend vers 1 en décroissant
- c ☑ elle tend vers 0 en décroissant
- d ☐ elle diverge vers $+\infty$ en croissant

4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Alors on peut montrer par récurrence sur n que :

- a ☐ u_n est rationnel
- b ☑ $u_n > 0$
- c ☐ $u_n \leqslant u_{n+1}$
- d ☐ $u_n \leqslant nu_1$

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (avec $u_n \neq \ell$ pour tout n). Alors le quotient $\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}$ tend vers

- a ☐ 0
- b ☐ 1
- c ☑ $f'(\ell)$
- d ☐ $f'(c)$ où c est compris entre ℓ et u_n

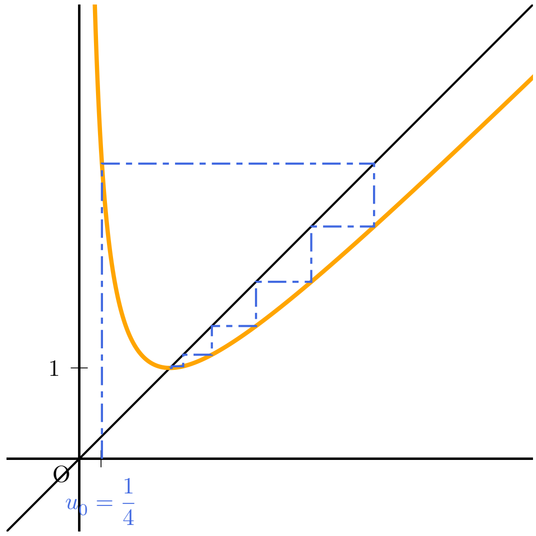
6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Alors

- a ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est croissante
- b ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$
- c ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive donc converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc est nulle
- d ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée

II Exercices

1 Sur la figure ci-contre sont représentées la courbe d'une fonction f, la droite d'équation $y = x$ et un terme u_0.

Représentez les termes visibles de la suite définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

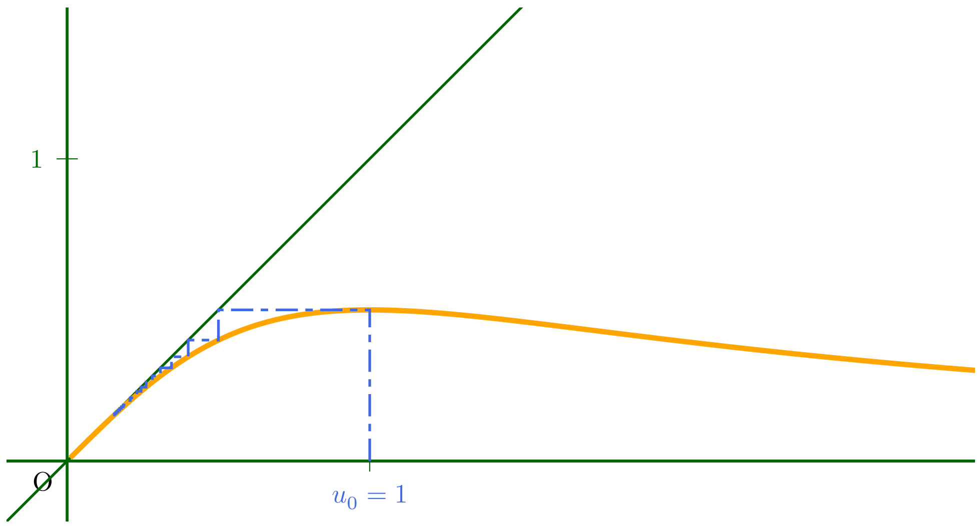


2 Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$

Posons $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et $\delta(x) = f(x) - x$.

- (a) $\forall\, x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant x \leqslant 1$ donc $[0\,;1]$ est stable par f et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- (b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant x \implies \delta(x) \leqslant 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- (c) Décroissante et minorée par 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
- (d) Comme f est continue sur $[0\,;1]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f. Il n'y en a qu'un dans $[0\,;1]$, c'est 0.

  Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.



3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes positifs décroissant vers 0. On définit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$.

ⓐ Montrer que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

ⓑ Conclure.

ⓐ On a :

- $v_{2n+2} - v_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ par décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $v_{2n+3} - v_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$ par décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $v_{2n+1} - v_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.

ⓑ Les suites extraites de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'indice pair et impair sont adjacentes donc convergentes vers la même limite. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc également convergente vers cette dernière.