Systèmes linéaires et Suites

QCM

Une seule réponse exacte par question.

1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors

- a ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est positive ou nulle
- b ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
- c ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est strictement positive
- d ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est constante à partir d'un certain rang

2 Dans quel cas le théorème d'encadrement permet-il de montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

- a ☐ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{n+1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$
- b ☑ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
- c ☐ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2n}$
- d ☐ $\forall n \geqslant 0, \quad n \leqslant u_n \leqslant n+1$

3 Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$?

- a ☐ $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$
- b ☐ $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$
- c ☑ $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$
- d ☐ $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

4 On pose $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Laquelle des suites suivantes converge ?

- a ☐ $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$
- b ☐ $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$
- c ☑ $(u_{4n})_{n\geqslant 0}$
- d ☐ $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

5 Soit $a > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ est croissante à partir d'un certain rang

- a ☑ pour tout $a > 0$
- b ☐ seulement pour a dans $]0,1]$
- c ☐ seulement pour $a \geqslant 1$
- d ☐ pour aucune valeur de a

6 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que $(u_n - v_n)$ converge, alors

- a ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent
- b ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- c ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- d ☐ $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1

7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

- a ☐ u_n tend vers 0
- b ☐ $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0
- c ☐ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1
- d ☑ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

8 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $1-\dfrac{1}{n} < u_n < 2+\dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors

- (a) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [1,2]$
- (b) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in]1,2[$
- (c) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$
- (d) ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément

9 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n + (-1)^n$ est

- (a) ☐ croissante
- (b) ☐ décroissante
- (c) ☑ non monotone
- (d) ☐ croissante et décroissante selon la parité de n

10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout n. Alors on peut dire que

- (a) ☐ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1
- (b) ☐ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- (c) ☐ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1
- (d) ☑ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

- (a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
- (b) ☐ la suite extraite (u_{2n}) converge
- (c) ☑ la suite $(u_{n+1}-u_n)$ tend vers 0
- (d) ☐ la suite extraite (u_{2n}) est bornée

12 Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

- (a) ☑ $\left(e^{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- (b) ☐ $\left((n+1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- (c) ☐ $\left(2^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- (d) ☐ $(3n)_{n\in\mathbb{N}}$

13 Combien vaut $a + a^2 + \cdots + a^n$ lorsque a est un réel différent de 1 ?

- (a) ☐ $\dfrac{1-a^n}{1-a}$
- (b) ☐ $\dfrac{a-a^n}{1-a}$
- (c) ☑ $\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}$
- (d) ☐ $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n. Alors la suite définie par $t_n = u_n - a$ est une suite géométrique lorsque :

- (a) ☐ $a = 3$
- (b) ☑ $a = -3$
- (c) ☐ $a = 2$
- (d) ☐ $a = 0$

Exercices

1 Résoudre le système suivant et donner précisément son ensemble de solutions. On donnera aussi deux solutions distinctes.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & 1 \\ 2x+y-z+t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & 1 \\ 2x+y-z+t & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & 1 \\ -y-3z+7t & = & -3 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2+2z-4t \\ y & = & 3-3z+7t \\ z & = & z \\ t & = & t \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} -2+2z-4t \\ 3-3z+7t \\ z \\ t \end{pmatrix},\ (z\,;t) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour $(0\,;0)$ et $(1\,;0)$ pour les paramètres $(z\,;t)$ on obtient deux solutions $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 Déterminer la limite de la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{\sqrt{37}}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} u_n + \sqrt{5} - 1. \end{array}\right.$

Comme dans le cours, on cherche d'abord le point fixe $\left(\text{qui existe car } \dfrac{1}{\sqrt{5}} \neq 1\right)$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} x + \sqrt{5} - 1 \iff x = \sqrt{5}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \sqrt{5}$ est alors géométrique de raison $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5}} < 1$ donc convergente vers 0.

D'après les théorèmes sur les limites de sommes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{5}$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$.

(a) Étudier les limites des suites extraites $(u_{9n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{(3n+1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$u_{9n^2} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_{(3n+1)^2} = \left(n^2 + \dfrac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \dfrac{6n+1}{9} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

4 Étudier si la fonction définie par $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser $f'(0)$ le cas échéant.

Sur $\mathbb{R}^*$, f est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ par composition et produit de fonctions qui le sont.

Comme $\left|x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x^3|$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a aussi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puis, $|f'(x)| \leqslant 3x^2 + |x|$ entraîne encore $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0 < \infty$.

D'après le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de telle classe avec $f'(0) = 0$.