Décomposition en éléments simples

Exercice 1 : Soient p et q dans $\mathbb{N}$, et $\mathrm{P} = (1+\mathrm{X})^p$, $\mathrm{Q} = (1+\mathrm{X})^q$.

Calculer de deux manières différentes le terme en X^n du produit PQ.

Quelle relation peut-on en déduire ?

Exercice 2 : Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - (\mathrm{X} - 2 + i)^2$
2. $\mathrm{P}_3(\mathrm{X}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2\mathrm{X}^k - k)$, où $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\mathrm{P}_4(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)^{2020} - \left(4\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X}\right)^{1010}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1 = 2\mathrm{X}, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n. \end{cases}$$

1. Calculer T_3 et T_4.
2. Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \deg(\mathrm{T}_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^n.

Exercice 4 : Déterminer les polynômes :

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{X}\mathrm{P}^2$.
2. $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}^2 - \mathrm{X}\mathrm{Q}^2 = \mathrm{X}\mathrm{R}^2$.
3. $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}'^2 = 4\mathrm{P}$

Exercice 5 (Exponentielle d'une matrice nilpotente) : Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ matrice nilpotente donnée, on pose :

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\mathrm{A}^k}{k!},\quad \text{la somme étant finie.} \tag{XIX.1}$$

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est nilpotente.

   En déduire que $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ existe et que
   $$\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A}) \times \exp(\mathrm{B}).$$
2. Montrer que $\exp(\mathrm{A})$ est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $\exp(\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
4. On supposera que la définition (XIX.1) se généralise à une matrice quelconque.

   Calculer $\exp(\mathrm{M})$ pour les quatre matrices suivantes :
   $$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Chercher un exemple simple où $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \neq \exp(\mathrm{A}) \times \exp(\mathrm{B})$.

Exercice 6 : Déterminer tous les polynômes P tels que :
$P(2) = 6$, $P'(2) = 1$, $P''(2) = 4$, et $\forall n \geqslant 3, P^{(n)}(2) = 0$.

Exercice 7 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^2 - 6A + 9I_2 = 0$
2. En effectuant la division euclidienne de X^n par un polynôme bien choisi, déterminer une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$; $B = X^2 - 3X + 1$
2. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$; $B = X + 3$
3. $A = iX^3 + X^2 - iX$; $B = X - 1 + i$
4. $A = X^4 + iX^3 + 2X - i$; $B = (1 - i)X^2 + iX + 1 + i$

Exercice 9 : Dans chaque cas, former une CNS pour que :

1. $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Former alors le quotient.

Exercice 10 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que les restes de la division euclidienne de P par $X - 1$, $X - 2$, $X - 3$ sont respectivement 4, 9 et 16.

Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$?

Exercice 11 : Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par le polynôme $X^2 + 1$.

Exercice 12 : Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$.

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2 + \sqrt{3}$.
2. Calculer $P\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Exercice 13 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$.

1. On suppose $a \neq b$. Calculer en fonction de a, b, $P(a)$, $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. On suppose $a = b$. Calculer en fonction de a, $P(a)$, $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice 14 : Démontrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise le polynôme $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$.

Exercice 15 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^4 + aX^3 + bX + 1$ ait une racine d'ordre de multiplicité au moins 3.

Exercice 16 : Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 dans le polynôme :

$$P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16.$$

Exercice 17 : Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si a est une racine multiple de P'' et si $P''|P$, alors a est une racine multiple de P et son ordre de multiplicité est au moins 4.

Exercice 18 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^5 - 1$
2. $X^5 + 1$
3. $X^8 + 1$
4. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$
5. $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2$
6. $6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1$
7. $X^8 + X^4 + 1$

Exercice 19 : Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$ et R, S dans $\mathbb{C}[X]$, sachant que Q n'admet que des racines multiples, et que R, S admettent une racine réelle.

1. $Q = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$
2. $R = X^3 - (3 + 2i)X^2 + (3 + 11i)X - 2(1 + 7i)$
3. $S = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$

Exercice 20 : Factoriser les polynômes réels $P = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ et $Q = X^3 + 3X - 14$ sachant qu'ils ont une racine commune.

À retenir 1 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$) : Toute fraction rationnelle F à coefficients complexes peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n_k} \frac{\lambda_{k,l}}{(X - \alpha_k)^l}.$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme à coefficients complexes.
$\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, α_k, $\forall\, l \in [\![1\,;n_k]\!]$, $\lambda_{k,l} \in \mathbb{C}$, $n_k \in \mathbb{N}$,

On dit alors α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k.

À retenir 2 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$) : Toute fraction rationnelle F à coefficients réels peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\lambda_{k,i}}{(X - \alpha_k)^i} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\delta_{k,j} X + \epsilon_{k,j}}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^j}. \qquad \text{(XIX.2)}$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme à coefficients réels.
$\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, α_k, $\forall\, i \in [\![1\,;n_k]\!]$, $\lambda_{k,i} \in \mathbb{R}$, $n_k \in \mathbb{N}$,
$\forall\, k \in [\![1\,;q]\!]$, β_k, γ_k, $\forall\, j \in [\![1\,;m_k]\!]$, $\delta_{k,j}$, $\epsilon_{k,j} \in \mathbb{R}$, $m_k \in \mathbb{N}$
$\Delta_k = {\beta_k}^2 - 4\gamma_k < 0$.

On dit alors que α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k.

Exercice 21 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

1. Par division euclidienne, montrer que $\Phi = x + 1 + \Phi_1$ avec $\Phi_1 = \dfrac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$.
2. Montrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}}. \qquad \text{(XIX.3)}$$

Exercice 22 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}.$$

1. Montrer que Φ peut se mettre sous la forme : $\Phi = 2+\Phi_1$ où $\Phi_1 = \dfrac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$.
2. Expliquer pourquoi Φ_1 peut s'écrire sous la forme : $\Phi_1 = \dfrac{\mathrm{A}}{x^3} + \dfrac{\mathrm{B}}{x^2} + \dfrac{\mathrm{C}}{x} + \dfrac{\mathrm{D}}{(x-1)^2} + \dfrac{\mathrm{E}}{x-1}$.
3. Expliquer comment la méthode de l'exercice précédent permettrait de trouver A et D.

   On ne demande pas de déterminer A et D ici mais on va plutôt appliquer une méthode plus efficace ici : la division suivant les puissances croissantes :
4. En effectuant la division suivant les puissances croissantes de $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$ par $(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$ montrer que :

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \qquad \text{(XIX.4)}$$

5. En déduire A, B et C.
6. Terminer la décomposition.

Exercice 23 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2+1)^3}.$$

1. En vous aidant de (XIX.2), donner la décomposition générale de Φ.
2. Montrer que $\Phi - \dfrac{3}{x} = \Phi_1$ où $\Phi_1 = \dfrac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^3}$.
3. En divisant successivement suivant les puissances décroissantes le numérateur de Φ_1 par x^2+1, puis le quotient obtenu par x^2+1, donner la décomposition en éléments simples de Φ_1.
4. Donner la décomposition en éléments simples de Φ.

Exercice 24 : Décomposer en éléments simples

1. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X-1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\dfrac{X^4 + 2X^2 + 1}{X^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
5. $\dfrac{X}{X^2 - 4}$ sur $\mathbb{R}$.
6. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$ sur $\mathbb{R}$.
7. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X(X-1)^4}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $\dfrac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$ sur $\mathbb{R}$.
10. $\dfrac{(3-2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$ sur $\mathbb{C}$.
11. $\dfrac{X + i}{X^2 + i}$ sur $\mathbb{C}$.
12. $\dfrac{X}{(X+i)^2}$ sur $\mathbb{C}$.
13. $\dfrac{X^2 + 1}{X^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. $\dfrac{X}{X^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. $\dfrac{X^2 + X + 1}{X^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. $\dfrac{X^3 - 2}{X^4(X^2 + X + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

19 $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

20 $\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 25 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1 $\dfrac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}$

2 $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

3 $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$

4 $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$

5 $\dfrac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$

6 $\dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$

7 $\dfrac{1}{X^6+1}$

8 $\dfrac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$

9 $\dfrac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$

10 $\dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$

11 $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$

12 $\dfrac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$

13 $\dfrac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$

14 $\dfrac{1}{X^n-1}$

15 $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

16 $\dfrac{n!}{(X-1)(X-2)\ldots(X-n)}$

17 $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$

18 $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$