Décomposition en éléments simples

Exercice 1 : Soient p et q dans $\mathbb{N}$, et $\mathrm{P} = (1+\mathrm{X})^p$, $\mathrm{Q} = (1+\mathrm{X})^q$.

Calculer de deux manières différentes le terme en X^n du produit PQ.

Quelle relation peut-on en déduire ?

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Comme $(1+\mathrm{X})^p(1+\mathrm{X})^q = (1+\mathrm{X})^{p+q}$ le terme de degré X^n est $\binom{p+q}{n}$ d'après la formule du binôme.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de P et Q respectivement et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ceux de PQ. On a :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. Identité dite de Vandermonde.

Exercice 2 : Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - (\mathrm{X} - 2 + i)^2$
2. $\mathrm{P}_3(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{n} (2\mathrm{X}^k - k)$, où $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\mathrm{P}_4(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)^{2020} - (4\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X})^{1010}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1 = 2\mathrm{X}, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n. \end{cases}$$

1. Calculer T_3 et T_4.
2. Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \deg(\mathrm{T}_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^n.

Exercice 4 : Déterminer les polynômes :

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{X}\mathrm{P}^2$.
2. $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}^2 - \mathrm{X}\mathrm{Q}^2 = \mathrm{X}\mathrm{R}^2$.
3. $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}'^2 = 4\mathrm{P}$

Exercice 5 (Exponentielle d'une matrice nilpotente) : Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ matrice nilpotente donnée, on pose :

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}, \quad \text{la somme étant finie.} \tag{XIX.1}$$

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est nilpotente.

   En déduire que $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ existe et que

$$\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A}) \times \exp(\mathrm{B}).$$

2. Montrer que $\exp(\mathrm{A})$ est inversible et donner son inverse.

3 Calculer $\exp(\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

4 On supposera que la définition (XIX.1) se généralise à une matrice quelconque.

Calculer $\exp(\mathrm{M})$ pour les quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Chercher un exemple simple où $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \neq \exp(\mathrm{A}) \times \exp(\mathrm{B})$.

Correction :

1 Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B. Puisque A et B commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,

- si $k \geqslant p$, $\mathrm{A}^k = 0$ et donc $\mathrm{A}^k\mathrm{B}^{p+q-1-k} = 0$
- si $k \leqslant p-1$ alors $p+q-1-k \geqslant q$ et encore une fois $\mathrm{B}^{p+q-1-k} = 0$.

Finalement, $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} \mathrm{A}^k\mathrm{B}^{p+q-1-k} = 0$ et $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+q-1$.

Les sommes définissant $\exp(\mathrm{A})$, $\exp(\mathrm{B})$ et $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ sont finies car A, B et $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{A}+\mathrm{B})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!}\mathrm{A}^i\mathrm{B}^j \\ \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\mathrm{A}^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\mathrm{B}^j\right) \text{ (toutes les sommes sont finies)} \\ = \exp(\mathrm{A} = \times \exp(\mathrm{B}). \end{aligned}$$

2 Si A est nilpotente, $-\mathrm{A}$ l'est aussi et commute avec A.

Donc $\exp(\mathrm{A}) \times \exp(-\mathrm{A}) = \exp(\mathrm{A}-\mathrm{A}) = \exp(0) = \mathrm{I}_n$.

$\exp(\mathrm{A})$ est inversible à gauche et, facilement à droite, donc inversible et $(\exp(\mathrm{A}))^{-1} = \exp(-\mathrm{A})$.

3 Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Déterminer tous les polynômes P tels que :
$\mathrm{P}(2)=6$, $\mathrm{P}'(2)=1$, $\mathrm{P}''(2)=4$, et $\forall n \geqslant 3, \mathrm{P}^{(n)}(2)=0$.

Correction : Soit d le degré du polynôme. On a nécessairement $d \geqslant 2$ sinon P'' serait nul.
D'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \sum_{n=0}^{p} \frac{\mathrm{P}^{(n)}(2)}{n!}(\mathrm{X}-2)^n \\
&= \mathrm{P}(2)+\mathrm{P}'(2)(\mathrm{X}-2)+\frac{\mathrm{P}''(2)}{2!}(\mathrm{X}-2)^2+0 \\
&= 6+(\mathrm{X}-2)+\frac{4}{2!}(\mathrm{X}-2)^2 \\
&= 6+(\mathrm{X}-2)+2(\mathrm{X}-2)^2 \\
\mathrm{P} &= 2\mathrm{X}^2-7\mathrm{X}+12.
\end{aligned}$$

Exercice 7 : On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $\mathrm{A}^2-6\mathrm{A}+9\mathrm{I}_2=0$
2. En effectuant la division euclidienne de X^n par un polynôme bien choisi, déterminer une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $\mathrm{A}=2\mathrm{X}^4-3\mathrm{X}^3+4\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6$; $\mathrm{B}=\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}+1$
2. $\mathrm{A}=2\mathrm{X}^5-5\mathrm{X}^3-8\mathrm{X}$; $\mathrm{B}=\mathrm{X}+3$
3. $\mathrm{A}=i\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2-i\mathrm{X}$; $\mathrm{B}=\mathrm{X}-1+i$
4. $\mathrm{A}=\mathrm{X}^4+i\mathrm{X}^3+2\mathrm{X}-i$; $\mathrm{B}=(1-i)\mathrm{X}^2+i\mathrm{X}+1+i$

Correction :

1. $\mathrm{A}=2\mathrm{X}^4-3\mathrm{X}^3+4\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6$; $\mathrm{B}=\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}+1$
$$\begin{cases} \mathrm{Q}=2\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+11 \\ \mathrm{R}=25\mathrm{X}-5 \end{cases}$$
2. $\mathrm{A}=2\mathrm{X}^5-5\mathrm{X}^3-8\mathrm{X}$; $\mathrm{B}=\mathrm{X}+3$
$$\begin{cases} \mathrm{Q}=2\mathrm{X}^4-6\mathrm{X}^3+13\mathrm{X}^2-39\mathrm{X}+109 \\ \mathrm{R}=-327 \end{cases}$$
3. $\mathrm{A}=i\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2-i\mathrm{X}$; $\mathrm{B}=\mathrm{X}-1+i$
$$\begin{cases} \mathrm{Q}=i\mathrm{X}^2+(2+i)\mathrm{X}+(3-2i) \\ \mathrm{R}=1-5i \end{cases}$$
4. $\mathrm{A}=\mathrm{X}^4+i\mathrm{X}^3+2\mathrm{X}-i$; $\mathrm{B}=(1-i)\mathrm{X}^2+i\mathrm{X}+1+i$
$$\begin{cases} \mathrm{Q}=\frac{1+i}{2}\mathrm{X}^2+\frac{i}{2}\mathrm{X}+\frac{3-i}{4} \\ \mathrm{R}=\frac{9-5i}{4}\mathrm{X}-\frac{2+3i}{2} \end{cases}$$

Exercice 9 : Dans chaque cas, former une CNS pour que :

1. X^2+2 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1}+bX^n+1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Former alors le quotient.

Correction :

1. Division euclidienne de $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$ par X^2+2 :

$$X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2=(X^2+2)[X^2-X+(2-\lambda)]+(\mu-2)X+(6-2\lambda)$$

$$\begin{aligned}
X^2+2|X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2 &\iff (\mu-2)X+(6-2\lambda)=0\\
&\iff \begin{cases}\mu-2=0\\ 6-2\lambda=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\mu=2\\ \lambda=3\end{cases}
\end{aligned}$$

$$X^2+2|X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2 \iff \begin{cases}\mu=2\\ \lambda=3\end{cases}$$

2. Soit $P=aX^{n+1}+bX^n+1$.

$$\begin{aligned}
(X-1)^2|P &\iff 1 \text{ est une racine au moins double de } P\\
&\iff \begin{cases}P(1)=0\\ P'(1)=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a+b+1=0\\ (n+1)a+nb=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a=n\\ b=-(n+1)\end{cases}
\end{aligned}$$

$$(X-1)^2|aX^{n+1}+bX^n+1 \iff \begin{cases}a=n\\ b=-(n+1)\end{cases}$$

$P=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.

Pour obtenir le quotient, on peut utiliser la formule de Taylor :

$$P=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{P^{(i)}(1)}{i!}(X-1)^i$$

$$P=\underbrace{P(1)+P'(1)(X-1)}_{R=0}+(X-1)^2\underbrace{\sum_{i=2}^{n+1}\frac{P^{(i)}(1)}{i!}(X-1)^{(i-2)}}_{Q}$$

$\forall i\in[\![2,n]\!], P^{(i)}=n\dfrac{(n+1)!}{(n+1-i)!}X^{n+1-i}-(n+1)\dfrac{n!}{(n-i)!}X^{n-i}$

et $P^{(n+1)}=n(n+1)!$

etc.

Exercice 10 : Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. On suppose que les restes de la division euclidienne de P par $X-1$, $X-2$, $X-3$ sont respectivement 4, 9 et 16.

Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$?

Correction : La division euclidienne s'écrit

$$\begin{cases} P = (X-1)(X-2)(X-3)Q + R \\ \deg R < 3. \end{cases}$$

On pose $R = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{cases} 4 = \tilde{P}(1) = a+b+c \\ 9 = \tilde{P}(2) = a+2b+4c \\ 16 = \tilde{P}(3) = a+3b+9c \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

$$R = X^2 + 2X + 1$$

Exercice 11 : Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par le polynôme X^2+1.

Exercice 12 : Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$.

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Calculer $P\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Exercice 13 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$.

1. On suppose $a \neq b$. Calculer en fonction de a, b, $P(a)$, $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. On suppose $a = b$. Calculer en fonction de a, $P(a)$, $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 14 : Démontrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise le polynôme $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$.

Exercice 15 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^4 + aX^3 + bX + 1$ ait une racine d'ordre de multiplicité au moins 3.

Exercice 16 : Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 dans le polynôme :

$$P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16.$$

Correction : Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 dans le polynôme :

$$P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$$

$$\begin{array}{ll}
P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16 & P(2) = 0 \\
P' = 6X^5 - 35X^4 + 68X^3 - 48X^2 + 16X - 16 & P'(2) = 0 \\
P'' = 30X^4 - 140X^3 + 204X^2 - 96X + 16 & P''(2) = 0 \\
P^{(3)} = 120X^3 - 420X^2 + 408X - 96 & P^{(3)}(2) = 0 \\
P^{(4)} = 360X^2 - 840X + 408 & P^{(4)}(2) = 168
\end{array}$$

2 est une racine de P d'ordre 4.

Exercice 17 : Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si a est une racine multiple de P'' et si $P''|P$, alors a est une racine multiple de P et son ordre de multiplicité est au moins 4.

Exercice 18 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. X^5-1
2. X^5+1
3. X^8+1
4. $(X^2-X+1)^2+1$
5. $(X^2-X+2)^2+(X-2)^2$
6. $6X^5+15X^4+20X^3+15X^2+6X+1$
7. X^8+X^4+1

Correction :

1

$$\begin{aligned}
X^5-1 &= \prod_{k=0}^{4}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)\\
&= (X-1)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{-4i\pi}{5}}\right)\\
&= (X-1)\left(X^2-2X\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)
\end{aligned}$$

$$X^5-1=(X-1)\left(X^2-2X\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)$$

NB : $X^5-1=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$

2

$$\begin{aligned}
X^5+1 &= \prod_{k=0}^{4}\left(X-e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)}\right)\\
&= \left(X-e^{\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{5}}\right)(X+1)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)\\
&= (X+1)\left(X^2-2X\cos\frac{\pi}{5}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{3\pi}{5}+1\right)
\end{aligned}$$

$$X^5+1=(X+1)\left(X^2-2X\cos\frac{\pi}{5}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{3\pi}{5}+1\right)$$

3

$$\begin{aligned}
X^8+1 &= \prod_{k=0}^{7}\left(X-e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{8}\right)}\right)\\
&= \left(X-e^{\frac{i\pi}{8}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)\left(X-e^{\frac{5i\pi}{8}}\right)\left(X-e^{\frac{7i\pi}{8}}\right)\\
&\quad\left(X-e^{-\frac{i\pi}{8}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{8}}\right)\left(X-e^{-\frac{5i\pi}{8}}\right)\left(X-e^{-\frac{7i\pi}{8}}\right)\\
&= \left(X^2-2X\cos\frac{\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{3\pi}{8}+1\right)\\
&\quad\left(X^2-2X\cos\frac{5\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{7\pi}{8}+1\right)
\end{aligned}$$

$$X^8+1=\left(X^2-2X\cos\frac{\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{3\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{5\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{7\pi}{8}+1\right)$$

Une autre méthode :

$$\begin{aligned}
X^8+1 &= (X^4+1)^2-2X^4\\
&= \left(X^4-X^2\sqrt{2}+1\right)\left(X^4+X^2\sqrt{2}+1\right)\\
&= \left[(X^2+1)^2-\left(2+\sqrt{2}\right)X^2\right]\left[(X^2+1)^2-\left(2-\sqrt{2}\right)X^2\right]\\
&= \left(X^2-X\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right)\left(X^2-X\sqrt{2-\sqrt{2}}+1\right)\\
&\quad\left(X^2+X\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right)\left(X^2+X\sqrt{2-\sqrt{2}}+1\right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}X^8+1&=\left[X^2-X\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right]\left[X^2+X\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right]\left[X^2-X\sqrt{2-\sqrt{2}}+1\right]\left[X^2+X\sqrt{2-\sqrt{2}}+1\right]\\&=\left(X^2-2X\cos\frac{\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{3\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{5\pi}{8}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{7\pi}{8}+1\right)\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}(X^2-X+1)^2+1&=(X^2-X+1)^2-(i)^2\\&=[X^2-X+1-i][X^2-X+1+i]\\&=[(X+i)(X-1-i)]\,[(X-i)(X-1+i)]\\&=(X+i)(X-i)(X-1-i)(X-1+i)\\&=(X^2+1)(X^2-2X+2)\end{aligned}$$

$$(X^2-X+1)^2+1=(X^2+1)(X^2-2X+2)$$

5

$$\begin{aligned}&(X^2-X+2)^2+(X-2)^2\\&=(X^2-X+2)^2-[i(X-2)]^2\\&=[(X^2-X+2)-i(X-2)]\,[(X^2-X+2)+i(X-2)]\\&=[X^2+(-1-i)X+(2+2i)]\,[X^2+(-1+i)X+(2-2i)]\\&=[X-2i]\,[X-(1-i)]\,[X+2i]\,[X-(1+i)]\\&=[X-2i]\,[X+2i]\,[X-(1-i)]\,[X-(1+i)]\\&=(X^2+4)(X^2-2X+2)\end{aligned}$$

$$(X^2-X+2)^2+(X-2)^2=(X^2+4)(X^2-2X+2)$$

6 $P=6X^5+15X^4+20X^3+15X^2+6X+1=(X+1)^6-X^6$.

$$\begin{aligned}\alpha \text{ est une racine de } P&\iff P(\alpha)=0\\&\iff (\alpha+1)^6-\alpha^6=0\\&\iff \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^6=1\\&\iff 1+\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{U}_6\\&\iff \exists k\in[\![0,5]\!],\quad 1+\frac{1}{\alpha}=e^{\frac{2ik\pi}{6}}\\&\iff \exists k\in[\![1,5]\!],\quad \alpha=\frac{1}{e^{\frac{2ik\pi}{6}}-1}\\&\iff \alpha\in\left\{e^{-\frac{2i\pi}{3}},\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{5i\pi}{6}},e^{\frac{2i\pi}{3}}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P&=6\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)\\&=6\left(X+\frac{1}{2}\right)(X^2+X+1)\left(X^2+X+\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$$6X^5+15X^4+20X^3+15X^2+6X+1=6\left(X+\frac{1}{2}\right)(X^2+X+1)\left(X^2+X+\frac{1}{3}\right).$$

7

$$\begin{aligned}X^8+X^4+1&=(X^4+1)^2-X^4\\&=[X^4-X^2+1]\,[X^4+X^2+1]\\&=[(X^2+1)^2-3X^2]\,[(X^2+1)^2-X^2]\\&=\left[X^2-X\sqrt{3}+1\right]\left[X^2+X\sqrt{3}+1\right][X^2-X+1]\,[X^2+X+1]\end{aligned}$$

$$X^8+X^4+1=\left[X^2-X\sqrt{3}+1\right]\left[X^2+X\sqrt{3}+1\right]\left[X^2-X+1\right]\left[X^2+X+1\right]$$

Remarque : $(X^8+X^4+1)(X^4-1)=X^{12}-1$

$$(X^8+X^4+1)\prod_{\zeta\in\mathbb{U}_4}(X-\zeta)=\prod_{\zeta\in\mathbb{U}_{12}}(X-\zeta)$$
$$X^8+X^4+1=\prod_{\zeta\in\mathbb{U}_{12}\setminus\mathbb{U}_4}(X-\zeta)$$

Exercice 19 : Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$ et R, S dans $\mathbb{C}[X]$, sachant que Q n'admet que des racines multiples, et que R, S admettent une racine réelle.

1. $Q=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$
2. $R=X^3-(3+2i)X^2+(3+11i)X-2(1+7i)$
3. $S=2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i$

Correction :

1. $Q=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$

$$Q=(X-3)^3(X-2)^2$$

2. $R=X^3-(3+2i)X^2+(3+11i)X-2(1+7i)$

$$R=(X-2)[X^2-(1+2i)X+(1+7i)]$$
$$R=(X-2)(X+1-3i)(X-2+i)$$

3. $S=2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i$

$$S=(2X-1)[X^2-(2+3i)X+(-1+3i)]$$
$$S=(2X-1)(X-1-i)(X-1-2i)$$

Exercice 20 : Factoriser les polynômes réels $P=X^3-9X^2+26X-24$ et $Q=X^3+3X-14$ sachant qu'ils ont une racine commune.

Correction : Soit α une racine commune à $\begin{cases}P=X^3-9X^2+26X-24\\Q=X^3+3X-14\end{cases}$

Alors α est une racine de $P-Q=-9X^2+23X-10$.

Donc $\alpha=2$ ou $\alpha=\dfrac{5}{9}$.

On constate que 2 est bien une racine commune à P et Q.

$$\begin{cases}P=(X-2)(X^2-7X+12)\\Q=(X-2)(X^2+2X+7)\end{cases}\iff\begin{cases}P=(X-2)(X-3)(X-4)\\Q=(X-2)(X^2+2X+7)\end{cases}$$

À retenir 1 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$) : Toute fraction rationnelle F à coefficients complexes peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$F(X)=E(X)+\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n_k}\frac{\lambda_{k,l}}{(X-\alpha_k)^l}.$$

où $E\in\mathbb{C}[X]$ est un polynôme à coefficients complexes.
$\forall k\in[\![1\,;p]\!]$, α_k, $\forall l\in[\![1\,;n_k]\!]$, $\lambda_{k,l}\in\mathbb{C}$, $n_k\in\mathbb{N}$,

On dit alors α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k.

À retenir 2 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$) : Toute fraction rationnelle F à coefficients réels peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k} \frac{\lambda_{k,i}}{(\mathrm{X}-\alpha_k)^i} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\delta_{k,j}\mathrm{X}+\epsilon_{k,j}}{(\mathrm{X}^2+\beta_k\mathrm{X}+\gamma_k)^j}. \quad \text{(XIX.2)}$$

où $\mathrm{E} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est un polynôme à coefficients réels.
$\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, α_k, $\forall\, i \in [\![1\,;n_k]\!]$, $\lambda_{k,i} \in \mathbb{R}$, $n_k \in \mathbb{N}$,
$\forall\, k \in [\![1\,;q]\!]$, β_k, γ_k, $\forall\, j \in [\![1\,;m_k]\!]$, $\delta_{k,j}$, $\epsilon_{k,j} \in \mathbb{R}$, $m_k \in \mathbb{N}$
$\Delta_k = {\beta_k}^2 - 4\gamma_k < 0$.
On dit alors que α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k.

Exercice 21 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}.$$

1. Par division euclidienne, montrer que $\Phi = x+1+\Phi_1$ avec $\Phi_1 = \dfrac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.
2. Montrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que :

$$\Phi_1 = \frac{\mathrm{A}}{x^2} + \frac{\mathrm{B}}{x} + \frac{\mathrm{C}}{x-\frac{1}{2}}. \quad \text{(XIX.3)}$$

Correction :

1. Easy...
2. On factorise le dénominateur pour trouver les pôles 0, double et $\frac{1}{2}$ simple puis on écrit la décomposition (XIX.2).

$$\Phi_1 = \frac{\mathrm{A}}{x^2} + \frac{\mathrm{B}}{x} + \frac{\mathrm{C}}{x-\frac{1}{2}}.$$

- On obtient alors A en multipliant les deux membres de (XIX.3) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($\mathrm{A} = -1$).
- On obtient de même C par multiplication par $x - \frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($\mathrm{C} = -2$).
- Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$, ou mieux en multipliant les deux membres de (XIX.3) par x et en passant à la limite pour $x \to \infty$ ($\mathrm{B} = 4$).

Finalement,

$$\frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2} = x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}.$$

Exercice 22 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}.$$

1. Montrer que Φ peut se mettre sous la forme : $\Phi = 2+\Phi_1$ où $\Phi_1 = \dfrac{4x^4-10x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$.

2 Expliquer pourquoi Φ_1 peut s'écrire sous la forme : $\Phi_1 = \dfrac{A}{x^3} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x} + \dfrac{D}{(x-1)^2} + \dfrac{E}{x-1}$.

3 Expliquer comment la méthode de l'exercice précédent permettrait de trouver A et D.

On ne demande pas de déterminer A et D ici mais on va plutôt appliquer une méthode plus efficace ici : la division suivant les puissances croissantes :

4 En effectuant la division suivant les puissances croissantes de $1-4x+8x^2-10x^3+4x^4$ par $(x-1)^2 = 1-2x+x^2$ montrer que :

$$1-4x+8x^2-10x^3+4x^4 = (1-2x+x^2)\times(1-2x+3x^2)+(-2x^3+x^4). \qquad \text{(XIX.4)}$$

5 En déduire A, B et C.

6 Terminer la décomposition.

Correction :

1 La division suivant les puissances décroissantes donne : $\Phi = 2 + \Phi_1$ avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4-10x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}.$$

2 La décomposition (XIX.2) s'écrit :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

3 La méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais il resterait encore 3 coefficients à déterminer.

4 La division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur x) du numérateur $1-4x+8x^2-10x^3+4x^4$ par $(x-1)^2$, ou plutôt par $1-2x+x^2$ s'écrit

$$1-4x+8x^2-10x^3+4x^4 = (1-2x+x^2)\times(1-2x+3x^2)+(-2x^3+x^4). \qquad \text{(XIX.5)}$$

5 En divisant les deux membres de (XIX.5) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

6 Le calcul de D et E est alors immédiat par décomposition de $\dfrac{x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)-1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

En conclusion,

$$\frac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Remarque : Cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\dfrac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $u = x-a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable x.

Exercice 23 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}.$$

1 En vous aidant de (XIX.2), donner la décomposition générale de Φ.

2. Montrer que $\Phi - \dfrac{3}{x} = \Phi_1$ où $\Phi_1 = \dfrac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^3}$.
3. En divisant successivement suivant les puissances décroissantes le numérateur de Φ_1 par x^2+1, puis le quotient obtenu par x^2+1, donner la décomposition en éléments simples de Φ_1.
4. Donner la décomposition en éléments simples de Φ.

Correction :

1. Pas de division préliminaire dans ce cas... Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)^3} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx + G}{x^2+1}. \tag{XIX.6}$$

2. **Remarque** : La méthode du premier exercice permet d'obtenir A, puis B et C (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (XIX.6) par x^2+1, puis limite quand x tend vers i ou vers $-i$, avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire $\dfrac{Bx + C}{(x^2+1)^3}$, simplifier par x^2+1, calculer D et E...

   On va ici se contenter de trouver A ($A = 3$), puis faire la soustraction $\Phi_1 = \Phi - \dfrac{A}{x}$. Sauf erreur de calcul, la fraction Φ_1 doit se simplifier par x.

   On trouve :
$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^3}.$$

3. La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$ par x^2+1, puis du quotient obtenu par x^2+1.

$$\Phi_1 = \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+1}.$$

Finalement,
$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+1}.$$

Remarque : Cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur simple, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle.

Exercice 24 : Décomposer en éléments simples

1. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\dfrac{X^4 + 2X^2 + 1}{X^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
5. $\dfrac{X}{X^2 - 4}$ sur $\mathbb{R}$.
6. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$ sur $\mathbb{R}$.
7. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X(X-1)^4}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $\dfrac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$ sur $\mathbb{R}$.
10. $\dfrac{(3-2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$ sur $\mathbb{C}$.

11 $\dfrac{X+i}{X^2+i}$ sur $\mathbb{C}$.

12 $\dfrac{X}{(X+i)^2}$ sur $\mathbb{C}$.

13 $\dfrac{X^2+1}{X^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

14 $\dfrac{X}{X^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

15 $\dfrac{X^2+X+1}{X^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

16 $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

17 $\dfrac{X^5+X+1}{X^6-1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

18 $\dfrac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

19 $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

20 $\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Correction :

1 $\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2-2X-1-\dfrac{5}{X-1}$.

2 $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X+7-\dfrac{3}{X-1}+\dfrac{19}{X-2}$.

3 $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X+5+\dfrac{3}{(X-1)^2}+\dfrac{7}{X-1}$.

4 $\dfrac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2+3+\dfrac{2}{X-1}-\dfrac{2}{X+1}$.

5 $\dfrac{X}{X^2-4} = \dfrac{1/2}{X+2}+\dfrac{1/2}{X-2}$.

6 $\dfrac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1/2}{X+1}+\dfrac{3/2}{X-1}$.

7 $\dfrac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1+\dfrac{1}{X}+\dfrac{3}{(X-1)^4}+\dfrac{6}{(X-1)^3}+\dfrac{10}{(X-1)^2}+\dfrac{4}{X-1}$.

8 $\dfrac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1+\dfrac{3/4}{(X-1)^3}+\dfrac{3/2}{(X-1)^2}+\dfrac{37/16}{X-1}-\dfrac{1/8}{(X+1)^2}-\dfrac{5/16}{X+1}$.

9 $\dfrac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X-3+\dfrac{7X+13}{(X^2+X+2)^3}-\dfrac{7X+21}{(X^2+X+2)^2}+\dfrac{14}{X^2+X+2}$.

10 $\dfrac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \dfrac{2+i}{X-i}+\dfrac{1-3i}{X+2i}$.

11 $\dfrac{X+i}{X^2+i} = \dfrac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}+\dfrac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$.

12 $\dfrac{X}{(X+i)^2} = \dfrac{1}{X+i}-\dfrac{i}{(X+i)^2}$.

13 $\dfrac{X^2+1}{X^4+1} = \dfrac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\dfrac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

14 $\dfrac{X}{X^4+1} = -\dfrac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\dfrac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \dfrac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

15 $\dfrac{X^2+X+1}{X^4+1} = \dfrac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\dfrac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \dfrac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

16 $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1} = X+\dfrac{3/4}{X-1}+\dfrac{1/4}{X+1}-\dfrac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X+\dfrac{3/4}{X-1}+\dfrac{1/4}{X+1}+\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i}+\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.

17 $\dfrac{X^5+X+1}{X^6-1} = \dfrac{1/2}{X-1}+\dfrac{1/6}{X+1}+\dfrac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \dfrac{1/2}{X-1}+\dfrac{1/6}{X+1}-\dfrac{\frac{1}{3}j}{X+j}-\dfrac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

18 $\dfrac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\dfrac{2}{X^4}+\dfrac{4}{X^3}-\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{3}{X}+\dfrac{X+1}{(X^2+X+1)^2}+\dfrac{3X+5}{X^2+X+1} =$
$-\dfrac{2}{X^4}+\dfrac{4}{X^3}-\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{3}{X}+\dfrac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2}+\dfrac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2}+\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j}+\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, où on a posé de façon standard $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

19 $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \dfrac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \dfrac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \dfrac{1/6}{X-i} + \dfrac{1/6}{X+i} - \dfrac{1/6}{X-2i} - \dfrac{1/6}{X+2i}$.

20 $\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\dfrac{4/3}{X^2+1} + \dfrac{7/3}{X^2+4} = \dfrac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \dfrac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \dfrac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \dfrac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$.

Exercice 25 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1 $\dfrac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}$

2 $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

3 $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$

4 $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$

5 $\dfrac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$

6 $\dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$

7 $\dfrac{1}{X^6+1}$

8 $\dfrac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$

9 $\dfrac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$

10 $\dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$

11 $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$

12 $\dfrac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$

13 $\dfrac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$

14 $\dfrac{1}{X^n-1}$

15 $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

16 $\dfrac{n!}{(X-1)(X-2)...(X-n)}$

17 $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$

18 $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$

Correction :

1 Soit $F = \dfrac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2} = \dfrac{X^2+3X+5}{(X-1)(X-2)}$.

1 et 2 ne sont pas racines du polynôme X^2+3X+5 et donc, F est bien sous forme irréductible. La partie entière de F étant clairement 1, F s'écrit sous la forme :

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2},$$

où a et b sont deux réels.

$a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \dfrac{1+3+5}{1-2} = -9$ et $b = \lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \dfrac{4+6+5}{2-1} = 15$. Donc,

$$F = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}.$$

2 Soit $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3},$$

où a, b et c sont trois réels.

$a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \dfrac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1$, puis $b = \lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \dfrac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5$ et $c = \lim_{x\to 3}(x-3)F(x) = \dfrac{9+1}{(3-1)(3-2)} = 5$. Donc,

$$F = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

3 Soit $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

avec

$a = \lim\limits_{x\to 0} xF(x) = 1$ et $c = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = 1$. Enfin, $x = -1$ fournit $-1 - \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$ et donc $b = -1$.

Pour trouver b, on peut aussi écrire (le meilleur) $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = a + b$ et donc que $b = -a = -1$.

On peut encore écrire (le moins bon ici)

$$\frac{1}{X(X-1)^2} - \frac{1}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1-(X-1)^2 - X}{X(X-1)^2} = \frac{-X^2+X}{X(X-1)^2} = -\frac{1}{X-1}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Autre démarche.

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(X-1)^2} &= \frac{X-1-X}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2}\\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.\end{aligned}$$

4 Soit $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \dfrac{1}{2}$ puis, $x = 0$ fournit $-2a + 2b = 1$ et donc $a = 0$.

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}\right).$$

5 Soit $F = \dfrac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3} - \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} - \frac{c}{(X+2)^3}.$$

$c = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^3F(x) = \dfrac{1}{64}$ puis,

$$\begin{aligned}F - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{(X-2)^3} - \frac{1}{(X+2)^3}\right) &= \frac{64-(X+2)^3+(X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{-12X^2+48}{64(X-2)^3(X+2)^3}\\ &= -\frac{3}{16}\frac{X^2-4}{(X-2)^3(X+2)^3} = -\frac{3}{16}\frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2}\end{aligned}$$

Puis, $b = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\left(F(x) - \dfrac{1}{64}\left(\dfrac{1}{(x-2)^3} - \dfrac{1}{(x+2)^3}\right)\right) = -\dfrac{3}{16}\dfrac{1}{(2+2)^2} = -\dfrac{3}{256}$. Enfin, $x = 0$ fournit $-\dfrac{1}{64} = -a - \dfrac{3}{512} - \dfrac{1}{256}$ et $a = \dfrac{1}{64} - \dfrac{5}{512} = \dfrac{3}{512}$. Donc,

$$F = \frac{1}{512}\left(\frac{3}{X-2} - \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{8}{(X-2)^3} - \frac{3}{X+2} - \frac{6}{(X+2)^2} - \frac{8}{(X+2)^3}\right).$$

$\boxed{6}$ Soit $F = \dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$. On a déjà $(X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2$. Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\bar{c}}{X-j^2} + \frac{\bar{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$b = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2F(z) = \dfrac{1}{9}$ et

$$\begin{aligned} d = \lim_{z\to j}(z-j)^2F(z) &= \frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2} = \frac{1}{j^2(j-1)^4} = \frac{1}{j^2(j^2-2j+1)^2} \\ &= \frac{1}{j^2(-3j)^2} = \frac{j^2}{9} \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{(j+j^2)X^2 - 2(j+j^2)X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)} \\ &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-X^2+2X+2}{(X-j)^2(X-j^2)} = \frac{(X^2+X+1)^2 + (X-1)^2(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2} \\ &= \frac{6X^3+3}{(X^3-1)^2} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F - 1 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right) &= \frac{X^6}{(X^3-1)^2} - 1 - \frac{2X^3+1}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{3X^6 - 3(X^3-1)^2 - 2X^3 - 1}{3(X^3-1)^2} = \frac{4X^3-4}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{X^3-1}. \end{aligned}$$

Mais alors, $a = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)(F(z) - 1 - \frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{j^2}{(z-j)^2} + \frac{j}{(z-j^2)^2}) = \frac{4}{3}\frac{1}{1+1+1} = \frac{4}{9}$. De même,

$$c = \lim_{z\to j}(z-j)(F(z) - 1 - \frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{j^2}{(z-j)^2} + \frac{j}{(z-j^2)^2}) = \frac{4}{3}\frac{1}{(j-1)(j-j^2)} = \frac{4j^2}{9}.$$

Donc,

$$F = 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j^2}{X-j} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{4j}{X-j^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right).$$

Si on veut la décomposition sur $\mathbb{R}$, on peut regrouper les conjugués :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= 1+\frac{1}{9}\Big(\frac{4}{\mathrm{X}-1}+\frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2}+\frac{4j^2(\mathrm{X}-j^2)+4j(\mathrm{X}-j)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}+\frac{j^2(\mathrm{X}-j^2)^2+j(\mathrm{X}-j)^2}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}\Big)\\
&= 1+\frac{1}{9}\Big(\frac{4}{\mathrm{X}-1}+\frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2}+\frac{-4\mathrm{X}+4}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}+\frac{-\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}+2}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}\Big)\\
&= 1+\frac{1}{9}\Big(\frac{4}{\mathrm{X}-1}+\frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2}+\frac{-4\mathrm{X}+4}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}+\frac{-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-1+3\mathrm{X}+3}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}\Big)\\
&= 1+\frac{1}{9}\Big(\frac{4}{\mathrm{X}-1}+\frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2}+\frac{-4\mathrm{X}+3}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}+\frac{3\mathrm{X}+3}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}\Big)
\end{aligned}$$

7 Soit $\mathrm{F}=\dfrac{1}{\mathrm{X}^6+1}$.

$$\mathrm{F}=\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda_k}{\mathrm{X}-\omega_k},$$

où $\omega_k=e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})}$. Mais,

$$\lambda_k=\frac{1}{6\omega_k^5}=\frac{\omega_k}{6\omega_k^6}=-\frac{\omega_k}{6}.$$

Donc,

$$\frac{1}{\mathrm{X}^6+1}=\frac{1}{6}\Big(-\frac{i}{\mathrm{X}-i}+\frac{i}{\mathrm{X}+i}-\frac{e^{i\pi/6}}{\mathrm{X}-e^{i\pi/6}}-\frac{e^{-i\pi/6}}{\mathrm{X}-e^{-i\pi/6}}+\frac{e^{i\pi/6}}{\mathrm{X}+e^{i\pi/6}}+\frac{e^{-i\pi/6}}{\mathrm{X}+e^{-i\pi/6}}\Big).$$

8 Soit $\mathrm{F}=\dfrac{\mathrm{X}^2+3}{\mathrm{X}^5-3\mathrm{X}^4+5\mathrm{X}^3-7\mathrm{X}^2+6\mathrm{X}-2}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}^5-3\mathrm{X}^4+5\mathrm{X}^3-7\mathrm{X}^2+6\mathrm{X}-2 &= (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^4-2\mathrm{X}^3+3\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+2)=(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}-2)\\
&= (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)+2(\mathrm{X}-1))=(\mathrm{X}-1)^3(\mathrm{X}^2+2).
\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de F est donc de la forme

$$\mathrm{F}=\frac{a}{\mathrm{X}-1}+\frac{b}{(\mathrm{X}-1)^2}+\frac{c}{(\mathrm{X}-1)^3}+\frac{d}{\mathrm{X}-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{\mathrm{X}+i\sqrt{2}}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{z\to i\sqrt{2}}(z-i\sqrt{2})\mathrm{F}(z)=\frac{(i\sqrt{2})^2+3}{(i\sqrt{2}-1)^3(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\frac{1}{(2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2}+6+3i\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{-4+10i\sqrt{2}}\\
&= -\frac{2+5i\sqrt{2}}{108}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{d}{\mathrm{X}-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{\mathrm{X}+i\sqrt{2}}=-\frac{1}{108}\frac{(2+5i\sqrt{2})(\mathrm{X}+i\sqrt{2})+(2-5i\sqrt{2})(\mathrm{X}-i\sqrt{2})}{\mathrm{X}^2+2}=-\frac{1}{108}\frac{4\mathrm{X}-20}{\mathrm{X}^2+2}=\frac{-\mathrm{X}+5}{27(\mathrm{X}^2+2)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3} &= \frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)}-\frac{-X+5}{27(X^2+2)}\\ &= \frac{27(X^2+3)-(-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{X^4-8X^3+45X^2-16X+86}{27(X-1)^3(X^2+2)}\\ &= \frac{(X^2+2)(X^2-8X+43)}{27(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3}\\ &= \frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3}\\ &= \frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}).\end{aligned}$$

Finalement,

$$F=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3})-\frac{1}{108}(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}}+\frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}}).$$

9 Soit $F=\dfrac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$. Puisque F est réelle et impaire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{d}{(X-i)^3}+\frac{\bar{b}}{X+i}+\frac{\bar{c}}{(X+i)^2}+\frac{\bar{d}}{(X+i)^3}.$$

$a=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x)=\dfrac{1}{(1+1)^3(1+1)}=\dfrac{1}{16}$. Puis,

$$\begin{aligned}F-\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}) &= \frac{8X-X(X^2+1)^3}{8(X^2+1)^3(X^2-1)} = \frac{-X^7-3X^5-3X^3+7X}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}\\ &= \frac{X(X^2-1)(-X^4-4X^2-7)}{8(X^2+1)^3(X^2-1)} = -\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}d=\lim_{x\to i}(x-i)^3F(x) &= \lim_{x\to i}(x-i)^3(F(x)-\frac{1}{16}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}))\\ &= -\frac{1}{8}\frac{i^4+4i^2+7}{(i+i)^3} = -\frac{i}{16}\end{aligned}$$

Puis,

$$-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{i}{16}\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{i}{16}\frac{1}{(X+i)^3}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{1}{8}\frac{3X^2-1}{(X^2+1)^3}=\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}.$$

Ensuite, $c=\dfrac{i^2+6}{8(i+i)^2}=-\dfrac{5}{32}$. Puis,

$$\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}+\frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2})=\frac{2(X^2+6)+5(X^2-1)}{16(X^2+1)^2}=\frac{7}{16(X^2+1)}.$$

Enfin, $b=\dfrac{7}{16(i+i)}=-\dfrac{7i}{32}$. Finalement,

$$F=\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1})-\frac{7i}{32}(\frac{1}{X-i}-\frac{1}{X+i})-\frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2})-\frac{i}{16}(\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{1}{(X+i)^3}).$$

10 Soit $F = \dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$.

$$\begin{aligned}X^5-X^4+X^3-X^2+X-1 &= X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1) = (X-1)((X^4+2X^2+1)-X^2)\\ &= (X-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)\\ &= (X-1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = aX+b+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X-j}+\frac{\bar{d}}{X-j^2}+\frac{e}{X+j}+\frac{\bar{e}}{X-j^2}.$$

$a = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x} = 1$, puis $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(F(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\dots}{x^5\dots} = 1$. Puis, $c = \dfrac{1^6+1}{5-4+3-2+1} = \dfrac{2}{3}$, $d = \dfrac{j^6+1}{5j^4-4j^3+3j^2-2j+1} = \dfrac{2}{3j^2+3j-3} = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$ et $e = \dfrac{(-j)^6+1}{5j^4+4j^3+3j^2+2j+1} = \dfrac{2}{3j^2+7j+5} = \dfrac{1}{2j+1}$.
Donc,

$$F = X+1+\frac{2}{3}\frac{1}{X-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j^2}+\frac{1}{2j+1}\frac{1}{X+j}+\frac{1}{2j^2+1}\frac{1}{X-j^2}.$$

11 Soit $F = \dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$.

La décomposition sur $\mathbb{R}$ (hors programme) s'obtiendrait de la façon suivante

$$\begin{aligned}X^7+1 &= (X^2+X+1)(X^5-X^4+X^2-X)+X+1\\ &= (X^2+X+1)[(X^2+X+1)(X^3-2X^2+X+2)-4X-2]+X+1\\ &= (X^2+X+1)^2(X^3-2X^2+X+2)-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1\\ &= (X^2+X+1)^2[(X^2+X+1)(X-3)+3X+5]-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1\\ &= X+1-(4X+2)(X^2+X+1)+(3X+5)(X^2+X+1)^2+(X-3)(X^2+X+1)^3\end{aligned}$$

Donc,

$$F = X-3+\frac{3X+5}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}.$$

12 Soit $F = \dfrac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$. La décomposition de F en éléments simples est de la forme

$$F = \frac{a}{X}+\frac{b_1}{X-1}+\frac{b_2}{(X-1)^2}+\frac{b_3}{(X-1)^3}+\frac{b_4}{(X-1)^4}+\frac{c_1}{X-\sqrt{2}}+\frac{c_2}{(X-\sqrt{2})^2}+\frac{d_1}{X+\sqrt{2}}+\frac{d_2}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

$a = \lim\limits_{x\to 0} xF(x) = \dfrac{1}{4}$. Puis,

$$\begin{aligned}c_2 = \lim_{x\to\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})^2F(x) &= \frac{2+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2} = \frac{3}{8\sqrt{2}(4-8\sqrt{2}+12-4\sqrt{2}+1)}\\ &= \frac{3}{8\sqrt{2}(17-12\sqrt{2})} = \frac{3}{8(-24+17\sqrt{2})} = \frac{3}{16}(24+17\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Un calcul conjugué fournit $d_2 = \dfrac{3}{16}(24-17\sqrt{2})$. On a ensuite

$$\frac{3}{16}\left(\frac{24+17\sqrt{2}}{(X-\sqrt{2})^2}+\frac{24-17\sqrt{2}}{(X+\sqrt{2})^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} &= \frac{2(X^2+1)-3(6X^2+17X+12)X(X-1)^4}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\ &= \frac{-18X^7+21X^6+60X^5-90X^4-30X^3+95X^2-36X+2}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\ &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)} \end{aligned}$$

Mais alors,

$$c_1 = \frac{-18.4\sqrt{2}+21.4+24.2\sqrt{2}-48.2+18\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{-13-6\sqrt{2}}{8(17-12\sqrt{2})} = -\frac{1}{8}(365+258\sqrt{2}),$$

et par un calcul conjugué, $d_1 = -\frac{1}{8}(365-258\sqrt{2})$. Ensuite,

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{365+258\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}}+\frac{365-258\sqrt{2}}{X+\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)} + \frac{365X+516}{4(X^2-2)} \\ &= \frac{2(-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1)+(365X+516)X(X-1)^4}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\ &= \frac{365X^6-980X^5+168X^4+1684X^3-1795X^2+552X-2}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\ &= \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4} \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} &F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} - \frac{1}{4X} = \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4} - \frac{1}{4X} \\ &= \frac{(365X^4-980X^3+898X^2-276X+1)-(X-1)^4}{4X(X-1)^4} = \frac{364X^4-976X^3+892X^2-272X}{4X(X-1)^4} \\ &= \frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4} \end{aligned}$$

Enfin, $b_4 = \lim_{x\to1}(x-1)^4\frac{182x^3-488x^2+446x-136}{2(x-1)^4} = 2$, puis

$$\frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4} - \frac{2}{(X-1)^4} = \frac{91X^3-244X^2+223X-70}{(X-1)^4} = \frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3}.$$

Puis, $b_3 = \lim_{x\to1}(x-1)^3\frac{91x^2-153x+70}{(x-1)^3} = 8$, puis

$$\begin{aligned} \frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3} - \frac{8}{(X-1)^3} &= \frac{91X^2-153X+62}{(X-1)^3} = \frac{91X-62}{(X-1)^2} \\ &= \frac{91X-91+29}{(X-1)^2} = \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

ce qui fournit $b_2 = 29$ et $b_1 = 91$.

$$F = \frac{1}{4X} + \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2} + \frac{8}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^4} - \frac{365+258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X-\sqrt{2}} + \frac{3(24+17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X-\sqrt{2})^2}$$
$$- \frac{365-258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X+\sqrt{2}} + \frac{3(24-17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

13 Soit $F = \dfrac{1}{(X+1)^7 - X^7 - 1}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^7 - X^7 - 1 &= 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X = 7X(X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1)\\ &= 7X(X+1)(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2\end{aligned}$$

Si on n'a pas deviné que $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2+X+1)^2$ (par exemple, en repérant que j est racine ou encore en manipulant l'identité $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$), on peut pratiquer comme suit

$$\begin{aligned}X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 &= X^2(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2(X + \frac{1}{X}) + 3) = X^2((X+\frac{1}{X})^2 + 2(X+\frac{1}{X}) + 1)\\ &= X^2(X + \frac{1}{X} + 1)^2 = (X^2+X+1)^2\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de $7F$ est donc de la forme

$$7F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\bar{c}}{X-j^2} + \frac{\bar{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$a = \dfrac{1}{(0+1)(0^2+0+1)^2} = 1$ et $b = \dfrac{1}{(-1)(1-1+1)^2} = -1$. Puis,

$$d = \frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2} = \frac{1}{j(-j^2)j^2(1-2j+j^2)} = \frac{1}{-j^2(-3j)} = \frac{1}{3}.$$

Ensuite,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(X-j)^2} + \frac{1}{(X-j^2)^2}\right) = \frac{(X-j^2)^2 + (X-j)^2}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}7F - \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2} &= \frac{3 - X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{-2X^4-4X^3-4X^2+X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}\\ &= \frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$c = \frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)} = \frac{5}{-3(j-j^2)} = \frac{5i}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement,

$$F = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j)} + \frac{3}{3(X-j)^2} - \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j^2)} + \frac{1}{3(X-j^2)^2}\right).$$

14 Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - 1$ et $\mathrm{F} = \dfrac{1}{\mathrm{P}}$. La partie entière de F est nulle et les pôles de $\mathcal{F}$ sont simples (car $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - 1$ et $\mathrm{P}' = n\mathrm{X}^{n-1}$ n'ont pas de racines communes dans $\mathscr{C}$). De plus, $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X} - \omega_k)$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc, $\mathrm{F} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} - \omega_k}$ où

$$\lambda_k = \frac{1}{\mathrm{P}'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\mathrm{X}^n - 1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{\mathrm{X} - e^{2ik\pi/n}}.$$

15 Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n - 1) = (\mathrm{X}-1)^2 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \omega_k$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Soit $\mathrm{F} = \dfrac{1}{\mathrm{P}}$. La partie entière de F est nulle. D'autre part, $\mathcal{F}$ admet un pôle double, à savoir 1 et $n-1$ pôles simples à savoir les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $\leqslant k \leqslant n-1$. Donc,

$$\mathrm{F} = \frac{a}{\mathrm{X}-1} + \frac{b}{(\mathrm{X}-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} - \omega_k}.$$

$\lambda_k = \dfrac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} - 1} = \dfrac{1}{n(1-\omega_k^{n-1})} = \dfrac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}$. Ensuite,

$$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2\mathrm{F}(x) = \frac{1}{1^{n-1} + \ldots + 1^1 + 1} = \frac{1}{n}.$$

Il reste à calculer a.

$$\mathrm{F} - \frac{1}{n(\mathrm{X}-1)^2} = \frac{n - (\mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^{n-2} + \ldots + \mathrm{X} + 1)}{n(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + \mathrm{X} + 1)} = \frac{-\mathrm{X}^{n-2} - 2\mathrm{X}^{n-3} - \ldots - (n-2)\mathrm{X} - (n-1))}{n(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + \mathrm{X} + 1)}.$$

Donc, $a = \displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)(\mathrm{F}(x) - \frac{1}{n(x-1)^2}) = \frac{-[(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1]}{n(1 + 1 \ldots + 1)} = -\frac{n-1}{2n}$.

Finalement,

$$\mathrm{F} = \frac{1}{n}(-\frac{n-1}{2n(\mathrm{X}-1)} + \frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k - 1}\frac{1}{\mathrm{X} - \omega_k}).$$

16 $\dfrac{n!}{(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-n)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} - k}$ avec

$$\lambda_k = \lim_{x\to k}(x-k)\mathrm{F}(x) = \frac{n!}{\prod_{j\neq k}(j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!} = n(-1)^{n-k}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}.$$

Donc,

$$\frac{n!}{(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}}{\mathrm{X} - k}.$$

17 Posons $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2\cos(2a) + 1$.

$$\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2\cos(2a) + 1 = (\mathrm{X}^2 - e^{2ia})(\mathrm{X}^2 - e^{-2ia}) = (\mathrm{X} - e^{ia})(\mathrm{X} - e^{-ia})(\mathrm{X} + e^{ia})(\mathrm{X} + e^{-ia})$$
$$(= (\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos a + 1)(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}\cos a + 1)).$$

P est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq \pm e^{-ia}$ ce qui équivaut à $a \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}^2-1)^2} = \frac{a}{\mathrm{X}-1} + \frac{b}{(\mathrm{X}-1)^2} - \frac{a}{\mathrm{X}+1} + \frac{b}{(\mathrm{X}+1)^2}.$$

$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2\mathrm{F}(x) = \frac{1}{4}$ puis $x=0$ fournit $0 = -2a+2b$ et donc $a = b = \frac{1}{4}$.

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{X}-1} + \frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2} - \frac{1}{\mathrm{X}+1} + \frac{1}{(\mathrm{X}+1)^2}\right).$$

2ème cas. Si $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}^2+1)^2} = \frac{a}{\mathrm{X}-i} + \frac{b}{(\mathrm{X}-i)^2} - \frac{a}{\mathrm{X}+i} + \frac{b}{(\mathrm{X}+i)^2}.$$

$b = \lim_{x\to i}(x-i)^2\mathrm{F}(x) = \frac{i^2}{(i+i)^2} = \frac{1}{4}$ puis $x=0$ fournit $0 = 2ia-2b$ et donc $a = -ib = -\frac{i}{4}$.

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{i}{\mathrm{X}-i} + \frac{1}{(\mathrm{X}-i)^2} + \frac{i}{\mathrm{X}+i} + \frac{1}{(\mathrm{X}+i)^2}\right).$$

3ème cas. Si $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, puisque F est réelle et paire,

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}-e^{ia}} + \frac{\overline{\mathrm{A}}}{\mathrm{X}-e^{-ia}} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}+e^{ia}} - \frac{\overline{\mathrm{A}}}{\mathrm{X}+e^{-ia}},$$

avec

$$\mathrm{A} = \frac{e^{2ia}}{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ia}+e^{ia})(e^{ia}+e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}}{8i\sin a\cos a e^{ia}} = \frac{-ie^{ia}}{4\sin(2a)}.$$

Donc,

$$\mathrm{F} = \frac{1}{4\sin(2a)}\left(-\frac{ie^{ia}}{\mathrm{X}-e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{\mathrm{X}-e^{-ia}} + \frac{ie^{ia}}{\mathrm{X}+e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{\mathrm{X}+e^{-ia}}\right).$$

18 Le polynôme $\mathrm{X}^{2n}+1 = \prod_{k=0}^{2n-1}(\mathrm{X}-e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})})$ est à racines simples car n'a pas de racine commune avec sa dérivée. En posant $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})}$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{X}^{2n}+1} = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{\mathrm{X}-\omega_k},$$

où

$$\lambda_k = \frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}} = \frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}} = -\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalement,

$$\frac{1}{\mathrm{X}^{2n}+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\omega_k}{\mathrm{X}-\omega_k}.$$