XX

Polynômes

Contenu

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Définition 1 : On appelle *polynôme* à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **nulle à partir d'un certain rang**.

On note $\mathbb{K}[X]$ leur ensemble.

$$\forall\, P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X],\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ a_n = 0.$$

Remarque : N peut être aussi grand que l'on veut, mais il est toujours fini.

Exemple 1 : $(1, -2, 3, 0, 4, 0, 0, \ldots) = 1 - 2X + 3X^2 + 4X^5$.

Vocabulaire :

— Pour n fixé, a_n est le n+1$^{\text{ème}}$ coefficient du polynôme.
— On note X le polynôme défini par $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ c'est-à-dire défini par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \geqslant 2, a_n = 0.$$

ATTENTION X n'est pas un nombre !

— On appelle polynôme constant, tout polynôme de la forme $(\lambda, 0, 0, \ldots)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

On le notera abusivement λ.
— Le polynôme défini par la suite nulle $(0, 0, \ldots)$ est appelé *polynôme nul* et noté $0_{\mathbb{K}[X]}$, ou dangereusement 0.

Par définition, un polynôme est donc nul si, et seulement si tous ses coefficients sont nuls :

$$\forall\ P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X], \quad P \equiv 0_{\mathbb{K}[X]} \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = 0.$$

I.1 Opérations sur $\mathbb{K}[X]$

Définition 2 (Somme de polynômes) : Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle *somme* des polynômes P et Q, notée $P + Q$, le polynôme défini par :

$$P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

ATTENTION La définition sous-entend que la somme de deux polynômes est un polynôme. C'est la raison de la preuve ci-dessous où nous allons nous en assurer.

La loi $+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (P\,;Q) & \longmapsto & P+Q \end{array}$ est appelée *loi de composition interne* (à $\mathbb{K}[X]$).

Proposition 1 : L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P + Q) + R = P + (Q + R) = P + Q + R$.

est commutative : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P + Q = Q + P$.

admet un élément neutre : le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \ldots)$ vérifie :

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$

est symétrisable : Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un *symétrique*, noté $-P$, et défini par $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$P + (-P) = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Vocabulaire : On dit que $\left(\mathbb{K}[X], +\right)$ est un groupe commutatif (ou abélien)

Corollaire I.1 : Deux polynômes sont égaux si, et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\forall\ P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X], \quad P \equiv_{\mathbb{K}[X]} Q \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n =_{\mathbb{K}} b_n.$$

Définition 3 (Loi externe) : Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit le *produit d'un polynôme par un scalaire*, noté $\lambda.P$ ou λP, le polynôme défini par :

$$\lambda.P = (\lambda \times a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Corollaire I.2 : L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est stable par combinaisons linéaires.

Vocabulaire : On dit que $\left(\mathbb{K}[X], +, \cdot\right)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 4 (Produit de polynômes) : Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.
On appelle *produit* des polynômes P et Q, notée $P \times Q$ ou plus simplement PQ, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vocabulaire : La suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée *produit de Cauchy* des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier, on a :

- $c_0 = a_0 b_0$
- $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$
- $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$
- ...

Remarque importante :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.} \tag{XX.1}$$

Proposition 2 : Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R$.

est commutatif : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \times Q = Q \times P$.

admet un élément neutre : le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \ldots)$.

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

est distributif sur l'addition : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

est compatible avec la loi externe :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \lambda.(P \times Q) = (\lambda.P) \times Q = P \times (\lambda.Q)$$

On dit que $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ est un anneau commutatif et que $\left(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\right)$ est une algèbre commutative (unitaire) sur $\mathbb{K}$.

ATTENTION $\left(\mathbb{K}[X], \times\right)$ n'est pas un groupe !

ATTENTION On le démontrera plus loin mais les seuls polynômes inversibles pour la loi $\times$ sont les polynômes constants non nuls.

Définition/Théorème 5 (Notation définitive) : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite des monômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} X^0 = (1, 0, 0, \dots) \\ X^{n+1} = X^n \times X \end{cases}$$

$X = (0, 1, 0, \dots)$ est appelée l'indéterminée et,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X^n = (0, 0, \dots, 0, \underset{(n+1)^{\text{ème}} \text{ coefficient}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots) \tag{XX.2}$$

Tout $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit alors :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k.$$

Vocabulaire : On appelle *monôme* tout polynôme de la forme a_kX^k où $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$.

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- ◇ $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- ◇ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$,
- ◇ $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_kX^k$,
- ◇ $\sum a_nX^n$,
- ◇ $P(X)$,
- ◇ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$,

en convenant toujours que $\forall k > n,\ a_k = 0$ *i.e.* la somme est finie et on écrira toujours un polynôme dans l'ordre croissant ou décroissant des puissances de X.

ATTENTION X n'est pas un nombre !

Définition 6 (Composition) : Soient $P = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_kX^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme composé Q par P, noté $P \circ Q$, le polynôme $P \circ Q = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_kQ^k$.

Remarque : Si $Q = X + a$ où $a \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ alors $P \circ Q = P(X+a) = \sum_{k\geqslant 0} a_k (X+a)^k$.

Exemples 2 (Opérations dans $\mathbb{K}[X]$) : Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$.

Somme : $P + Q = 1 + 4X$.

Loi externe : $2P = 2 + 6X - 2X^2$.

Produit :

k	0	1	2	3	4
a_k	1	3	-1		
b_k	0	1	1		
c_k	0	1	4	2	-1

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_0 = a_0 b_0 = 0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 4 \\ c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 2 \\ c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -1 \end{cases}$$

$$PQ = X + 4X^2 + 2X^3 - X^4.$$

Composition : $P \circ Q = 1 + 3(X + X^2) - (X + X^2)^2 = 1 + 3X - 2X^2 - 2X^3 - X^4$.

Exercice 1 : Soient $P(X) = X^2 + 3X - 2$ et $Q(X) = 6X - X^2 + 1$.
Déterminer $P + Q, 3P - 2Q, P^3, PQ$ et $P(Q(X))$.

Proposition 3 (Binôme de Newton) : Soient P et Q deux polynômes sur $\mathbb{K}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}.$$

Exemple 3 : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - X^n = (1 - X) \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

Exercice 2 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X^3 + X^2 + X + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1.$$

I.2 Degré d'un polynôme

Définition 7 : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

On appelle *degré de* P et on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

On convient que $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$.

Exemple 4 : Si $P = X^2 + 5X^3 + X^9$, on a $\deg(P) = 9$.

Remarques :

— si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$. Ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$.
Le coefficient a_n s'appelle alors le *coefficient dominant*, $a_n X^n$ le monôme dominant.

— On dit que P est *unitaire* ou *normalisé* si $P \neq 0$ et si son coefficient dominant est égal à 1.
— Si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le polynôme nul alors, par définition, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. De fait, il n'existe pas d'entier n tel que $a_n \neq 0$. C'est la raison de la définition ci-dessus.

ATTENTION

— Les polynômes constants ont un degré $\leqslant 0$.
— Les polynômes de degré nul sont les polynômes constants non nuls.

Proposition 4 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exercice 3 : Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^3 - X(X - 2 + i)^2$
2. $P_2(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 4.1 :

1. Les seuls polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad PQ = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$.

Vocabulaire : On dit que $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ est un anneau *intègre*.

Définition 8 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré *inférieur ou égal* à n.

Proposition 5 : $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires.

Exercice 4 : Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on définit $f(P) = P(X+1) - P(X)$.
Calculer $f(X^3)$, $f(X^2)$, $f(X)$ et $f(1)$ puis montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

I.3 Notions de polynômes de matrices

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Depuis le chapitre sur le calcul matriciel, on sait qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont encore des matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note alors $P(M)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{p} a_i M^i = a_p M^p + \ldots + a_1 M + a_0 I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition/Théorème 9 :

- Un polynôme en M commute avec la matrice M : $P(M) \times M = M \times P(M)$.
- Lorsque $P(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$, on dit que P est un *polynôme annulateur* de M.
- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

  Alors,
  - $(P \times_{\mathbb{K}[X]} Q)(M) = P(M) \times_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} Q(M)$,
  - $(\lambda \cdot_{\mathbb{K}[X]} P +_{\mathbb{K}[X]} Q)(M) = \lambda \cdot_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} P(M) +_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} Q(M)$.

Corollaire 5.1 : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$P(M) \times_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} Q(M) = Q(M) \times_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} P(M).$$

Les polynômes de matrices permettent d'introduire de la commutativité là où il n'y en avait pas. Vous verrez que cela a une grande importance.

Exercice 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 + A - 2I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

II DÉRIVATION DANS $\mathbb{K}[X]$

II.1 Polynôme dérivé

Définition 10 : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle *polynôme dérivé de* P, noté P′, le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

On définit également, par récurrence, le *polynôme dérivé k-ième de* P, noté $P^{(k)}$, par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'. \end{cases}$$

Remarque : Il s'agit d'une dérivation formelle : il n'y a pas de question à se poser sur la dérivabilité d'un polynôme comme pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 5 : $(1 + 3X - X^2)' = 3 - 2X$ et $(20)' = 0$.

II.2 Degré du polynôme dérivé

Proposition 6 : $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leqslant 0 \end{cases}$

En particulier, $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P) \leqslant n \implies P^{(n+1)} = 0$

Remarque : $\forall\, P \in \mathbb{K}[X]$, $P' = 0 \iff \deg(P) \leqslant 0 \iff$ P est constant.

II.3 Dérivation et opérations

Proposition 7 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$.
3. $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (P^n)' = nP' \times P^{n-1}$.

La dérivation des polynômes est donc, comme pour les fonctions, linéaire

Exercice 6 : Déterminer les polynômes :

1. $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(1 - X)P' - P = X^n$.
2. $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2 + 1)P' - 6P = 0$.

Proposition 8 :

1. $\forall\, P,\, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$.
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Formule de Leibniz

II.4 Fonction polynomiale associée à un polynôme

Définition 11 : Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $n \in \mathbb{N}$.

La *fonction polynomiale associée à* P est la fonction définie par

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

On appelle *fonction polynomiale* toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$f = \widetilde{P}.$$

L'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est ici noté $\mathrm{P}ol(\mathbb{K})$.

Exemple 6 : Si $P = X^2 + 1$, alors $\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$.

Corollaire 8.1 : L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathrm{Pol}(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$ est surjective.

ATTENTION X n'est toujours pas un nombre ! On ne dit pas « Posons $X = 1$ », mais « Évaluons en 1 ».

Proposition 9 : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.
3. $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
4. $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$.

ATTENTION

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont dotés de notions différentes d'addition, multiplication, composition et dérivation.

Dans la formule $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$ par exemple, ce ne sont pas les mêmes « $\circ$ » qu'on trouve à gauche et à droite.

Pire, dans la formule $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$, la dérivée P' est une dérivée formelle alors que la dérivée $\widetilde{P}'$ est la dérivée d'une fonction définie comme limite d'un taux d'accroissement.

Sachant que $\widetilde{1}$ est la fonction constante $x \longmapsto 1$, élément neutre de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ l'application $P \longmapsto \widetilde{P}$ s'avère être un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.

II.5 Formules de Taylor

Théorème 10 (Théorème de Taylor) : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \\ &= \widetilde{P}(a) + \widetilde{P}'(a)(X-a) + \frac{\widetilde{P}''(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{\widetilde{P}^{(p)}(a)}{p!}(X-a)^p. \end{aligned}$$

Exemple 7 : Soit $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{(x-1)^3}$.

Imaginons que nous voulions effecteur sa décomposition en éléments simples dans le but de calculer une primitive de f par exemple.

On souhaite donc écrire $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2} + \dfrac{d}{(x-1)^3}$.

Il suffirait de savoir écrire $2x^3+2x^2+3x-4$ sous la forme $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ pour conclure.
La formule de Taylor permet d'éviter les développements, l'identification, et la résolution du système.

$$\begin{array}{ll} P = 2X^3+2X^2+3X-4 & \text{donc } P(1)=3 \\ P' = 6X^2+4X+3 & \text{donc } P'(1)=13 \\ P'' = 12X+4 & \text{donc } P''(1)=16 \\ P^{(3)} = 12 & \text{donc } P^{(3)}(1)=12 \end{array}$$

D'après le théorème de Taylor : $P = P(1)+P'(1)(X-1)+\dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2+\dfrac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3$.

D'où $P = 3+13(X-1)+8(X-1)^2+2(X-1)^3$ et $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^3}+\dfrac{13}{(x-1)^2}+\dfrac{8}{x-1}+2$.

Exercice 7 : Donner la décomposition en éléments simples de $f : x \longmapsto \dfrac{4x^3-3x^2+7x-1}{(x-2)^3}$.

Corollaire 10.1 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :
$$P(X+a) = \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n.$$

Théorème 11 (Théorème de Taylor-Mac Laurin [1]) : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :
$$P = \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(0)}{n!} X^n.$$

En particulier, si $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n X^n$, alors, par identification, $a_n = \dfrac{\widetilde{P}^{(n)}(0)}{n!}$ et $\widetilde{P}^{(n)}(0) = n!a_n$.

III ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{K}[X]$

III.1 Divisibilité

Définition 12 : Soient $A,\ P \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que A *divise* P, noté $A|P$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.

  On dit alors que A est *un diviseur* de P ou que P est *un multiple* de A.
- On dit que A et P sont *associés* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda A$.

[1]. Colin Mac Laurin : écossais, 1698-1746

Exemples 8 :

- $X-1|X^2-1$ car $X^2-1=(X-1)(X+1)$.
- $X-3$ et $2X-6$ sont associés car $2X-6=2(X-3)$.
- Tous les polynômes divisent le polynôme nul.
- $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad 0|P \iff P=0$.

Proposition 12 :

1. $\forall\, A \in \mathbb{K}[X], \quad A|A$ et $A|0$
2. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|B \\ B|A \end{cases} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^\star, \quad B=\lambda A.$
3. $\forall\, A, B, C \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|B \\ B|C \end{cases} \implies A|C.$

Remarque : La divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas une relation d'ordre.

Proposition 13 (Compatibilité avec les opérations) :

1. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad A|P \implies A|PQ$
2. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ A|Q \end{cases} \implies A|P+Q$
3. $\forall\, A, P, B, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ B|Q \end{cases} \implies AB|PQ$
4. $\forall\, A, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A|P \implies A^n|P^n$

ATTENTION $\begin{cases} A|P \\ B|P \end{cases}$ n'implique pas $AB|P$.

Exercice 8 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X^2|(X+1)^n - nX + 1$.

III.2 Division euclidienne

Théorème 14 : Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Lorsqu'on a obtenu cette écriture, on dit qu'on a effectué la *division euclidienne* de A par B.
A est le *dividende*, B le *diviseur*, Q le *quotient* et R le *reste*.

Exemple 9 : $2X^4 - X^3 + 6X^2 + 7X - 14 = (X^2+X+1)(2X^2-3X+7) + (3X-21)$

Exemple 10 : Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
1X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\
\cline{10-10}
-(X^4 & - & X^3) & & & & & & & 1X^3+6X^2+11X+6 \\
\cline{1-3}
 & & 6X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & -(6X^3 & - & 6X^2) & & & & & \\
 & & & & 11X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & & & -(11X^2 & - & 11X) & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 6X & - & 6 & \\
 & & & & & & -(6X & - & 6) & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On obtient donc, $P = (X-1)(X^3 + 6X^2 + 11X + 6)$.

Cette méthode de calcul est une alternative à l'identification lorsqu'on cherche à factoriser un polynôme comme ici, par exemple, après avoir trouvé 1 comme racine évidente.

Exercice 9 : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
2. En déduire l'expression de M^2 en fonction de M et de I_3.
3. On définit le polynôme $P = X^2 + 2X - 3$.
   - a) Déterminer le reste R de la division euclidienne de X^n par P.
   - b) En déduire M^n
4. M est-elle inversible ?

Méthode 1 (Calcul de la puissance d'une matrice) :
Si P est un polynôme annulateur de la matrice A i.e. si $P(A) = 0$, on écrit la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists\, Q_n, R_n \in \mathbb{K}[X], X^n = Q_n P + R_n \qquad \text{et} \qquad \deg(R_n) < \deg(P).$$

La relation matricielle $A^n = \underbrace{P(A)}_{=0} \times Q_n(A) + R_n(A)$ donne $A^n = R_n(A)$. Il suffit donc de connaître R_n.

Proposition 15 : Soient A et B deux polynômes avec B non nul.

$$B | A \iff \text{le reste dans la division euclidienne de } A \text{ par } B \text{ est nul.}$$

Exercice 10 : Démontrer que $X^2 - 3X + 2$ divise le polynôme $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

III.3 Polynômes irréductibles

Définition 13 : Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* ou *premier* si :

- $\deg(P) \geqslant 1$
- P n'admet comme diviseurs que les λ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$) et les μP (avec $\mu \in \mathbb{K}^\star$).

ATTENTION

Un même polynôme peut être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$:

— X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

— $X^2+1=(X+i)(X-i)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et donc il est non irréductible.

Théorème 16 (Admis) : Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles, unique à l'ordre près des facteurs et aux constantes multiplicatives près.

On dit que $\mathbb{K}[X]$, tout comme $\mathbb{Z}$, est un anneau *factoriel*.

Exemples 11 : Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)=\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\right)(2X^2+2X+2)$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^3-1=(X-1)(X-\mathrm{j})(X-\overline{\mathrm{j}})=\left(\frac{1}{6}X+\frac{1}{6}\right)(2X-2\mathrm{j})(3X-3\overline{\mathrm{j}})$.

Corollaire 16.1 : Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet (au moins) un diviseur irréductible.

Proposition 17 : Les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1 sont irréductibles.

IV Racines d'un polynôme

Définition 14 :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est *une racine de* P (ou *un zéro* P) lorsque $\widetilde{P}(\alpha)=0$.

Exemple 12 : 1 est une racine de $P=X^2-1$ car $\widetilde{P}(x)=x^2-1$ et $\widetilde{P}(1)=1^2-1=0$.

Théorème 18 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\alpha \text{ est une racine de } P \iff P \text{ est divisible par } X-\alpha.$$

Remarque : On a vu, au cours de la démonstration que le reste dans la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $\widetilde{P}(\alpha)$.

Corollaire 18.1 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, alors P est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$.

Exercice 11 : À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^2 + 1$ divise-t-il $X^n + 1$?

Théorème 19 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.

Alors, P possède au maximum n racines.

ATTENTION Dans $\mathbb{R}$, un polynôme de degré n ne possède pas forcément n racines.

Corollaire 19.1 :

1. Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.
2. Le seul polynôme admettant une infinité de racines et le polynôme nul.

Exemple 13 : La fonction cos n'est pas polynomiale.

Exercice 12 (Polynômes de Tchebychev) :

1. Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
2. Calculer T_2, T_3, et T_4.
3. Démontrer que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

   En déduire les racines de T_n.

IV.1 Identification entre $Pol(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$

Proposition 20 : L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & Pol(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$ est bijective.

Chaque fonction polynomiale f est donc associée de manière unique à un et un seul polynôme P.

On se permettra donc par la suite d'identifier P et $\widetilde{P}$, ce que l'on avait commencé à faire avec les polynômes constants.

Corollaire 20.1 (Polynômes de Lagrange) : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux et $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall i \in [\![1\,;n+1]\!]\,,\quad \mathrm{P}\left(x_i\right)=y_i.$$

Il s'agit du polynôme défini par la formule :

$$\mathrm{P}(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{k\neq i}\frac{(\mathrm{X}-x_k)}{(x_i-x_k)}\right)\cdot y_i$$

Remarque : Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, cela signifie qu'il existe une unique fonction polynômiale P de degré inférieur au égal à n dont le graphe passe par les $n+1$ points du plan $\mathrm{M}_1\left(x_1,y_1\right),\ldots,\mathrm{M}_{n+1}\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)$.

IV.2 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 15 : Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

Si α est une racine de P, on appelle *ordre de multiplicité de la racine α dans* P le plus grand entier n tel que $(\mathrm{X}-\alpha)^n|\mathrm{P}$.

Théorème 21 : Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. α est une racine de P de multiplicité m.
2. $\exists\,\mathrm{Q}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}=(\mathrm{X}-\alpha)^m\mathrm{Q}$ et $\mathrm{Q}(\alpha)\neq 0$.
3. $\mathrm{P}(\alpha)=\mathrm{P}'(\alpha)=\cdots=\mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha)=0$ et $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

À retenir ! : On dit que $\alpha\in\mathbb{K}$, est racine de $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ d'ordre de multiplicité au moins $m\in\mathbb{N}^*$ si $(\mathrm{X}-a)^m|\mathrm{P}$ ou s'il existe $\mathrm{Q}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}=(\mathrm{X}-a)^m\mathrm{Q}$ ou si $\forall\,m\in[\![0\,;m-1]\!]$, $\mathrm{P}^{(k)}(\alpha)=0$.

Exemples 14 :

- Déterminer les racines de $\mathrm{P}=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}^3-1)(\mathrm{X}^4-1)\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et leur multiplicité.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}&=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}^3-1)(\mathrm{X}^4-1)\\&=(\mathrm{X}-1)[(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)][(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)][(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1)]\\&=(\mathrm{X}-1)^4(\mathrm{X}+1)^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1)\end{aligned}$$

  $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1$ n'a pas de racines réelles ($\Delta=-3$) et X^2+1 non plus.

  P a donc deux racines réelles : 1 de multiplicité 4 et -1 de multiplicité 2.
- $\mathrm{P}=a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$ avec $a\neq 0$.

  Si $\Delta=0$, $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ est une racine double de P : $\mathrm{P}=a(\mathrm{X}-x_0)^2$.

Exercice 13 : Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n = n\mathrm{X}^{n+1} - (n+1)\mathrm{X}^n + 1$ est divisible par $(\mathrm{X}-1)^2$.

Corollaire 21.1 : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \cdots, m_n$, alors P est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k}$.

Exercice 14 : Montrer que le polynôme $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ n'admet que des racines simples.

V Décomposition en facteurs irréductibles

V.1 Polynôme scindé

Définition 16 : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme non nul.

On dit que P est *scindé* lorsqu'il est constant, ou s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1.

Plus précisément, P est scindé si, et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-a_k).$$

Exemples 15 :

- $(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)$ est scindé.
- $(\mathrm{X}-1)^8$ est scindé.
- X^2+1 ne peut s'écrire sous la forme $(\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Sinon, α et β seraient des racines réelles de X^2+1 qui n'en a pas !

  Par conséquent, X^2+1 n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

  Il est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ puisqu'on peut écrire $\mathrm{X}^2+1 = (\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)$.

ATTENTION La notion de polynôme scindé dépend du corps $\mathbb{K}$.

V.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$

Théorème 22 (de D'Alembert-Gauss) : Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, tout polynôme *non constant* admet au moins une racine (dans $\mathbb{C}$).

Corollaire 22.1 : Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, tout polynôme est scindé.

On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Corollaire 22.2 : Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{m_k}}$$

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont les racines de P de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_n$ et λ est le coefficient dominant de P.

Corollaire 22.3 : Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Exemple 16 : Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de P sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Il y en a n distinctes.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) | P$.

On a donc $P = \left[\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right] Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Or, $\deg(P) = n + \deg(Q)$ d'où $\deg(Q) = 0$ et $Q = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\star$.

D'où, $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Enfin, par identification des coefficients dominants, $\lambda = 1$.

$$\text{En conclusion,}\quad X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta).$$

Exercice 15 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P = (X + \mathrm{i}\,)^{2n+1} - (X - \mathrm{i}\,)^{2n+1}$.

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

V.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 23 (Racines complexes d'un polynôme réel) : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si α est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

ATTENTION

i est une racine de $(X - i)(X + 2)$ mais $\overline{i}$ ne l'est pas.

Pas de contradiction avec la propriété ci-dessous car $(X - i)(X + 2) \notin \mathbb{R}[X]$.

Proposition 24 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si α est une racine de P de multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P de multiplicité m également.

V.4 En pratique,

Corollaire 24.1 : Dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s}[X^2+u_\ell X+v_\ell]^{\mu_\ell}} \tag{XX.3}$$

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

où :

- λ est le coefficient dominant de P.
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- $(u_1,v_1), (u_2,v_2), \cdots, (u_s,v_s)$ sont des couples de réels tels que $\forall\, k \in [\![1\,;s]\!]$, $u_k^2-4v_k<0$, *i.e.* $X^2+u_kX+v_k$ n'a pas de racines réelles.
- $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s \in \mathbb{N}$.

Corollaire 24.2 : Les seuls polynômes normalisés irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

- Les polynômes de degré 1 de la forme $X-\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Les polynômes de degré 2 irréductibles de la forme X^2+uX+v avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $u^2-4v<0$.

ATTENTION Un polynôme peut très bien ne pas avoir de racines dans $\mathbb{K}$ et ne pas être irréductible :

$$X^4+1 = (X^2+X\sqrt{2}+1)(X^2-X\sqrt{2}+1) \quad \text{n'a pas de racines réelles.}$$

Exemple 17 : Comment factoriser $P = X^6-1$ dans $\mathbb{R}[X]$?

On le factorise dans $\mathbb{C}[X]$, puis on regroupe les racines avec leur conjugué.

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=0}^{5}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{6}}\right) \\
&= (X-1)\left(X-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)(X+1)\left(X-e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\frac{5i\pi}{3}}\right) \\
&= (X-1)(X+1)\left(X-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \\
&= (X-1)(X+1)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X+1\right).
\end{aligned}$$

Finalement, $X^6-1 = (X-1)(X+1)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X+1\right)$.

Remarque : Bien sûr, on peut également reconnaître que $X^6-1 = \left(X^3\right)^2-1$ ou $X^6-1 = \left(X^2\right)^3-1$ puis factoriser, à la main, chaque facteur.

Exercice 16 : Factoriser X^6+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

V.5 Algorithme de Hörner

Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ une racine de f.

Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x)$.

On pose :
$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0 \\ \mathrm{Q}(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Cette méthode, appelée aussi algorithme de Ruffini-Hörner, consiste à calculer les coefficients de Q de proche en proche à partir de b_{n-1} puis en descendant jusqu'à b_0.

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} & \qquad b_{n-1} &= a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ a_k &= b_{k-1} - ab_k & b_{k-1} &= a_k + ab_k \\ a_0 &= -ab_0. & b_0 &= -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$		$b_1 = a_2 + ab_2$	$b_0 = a_1 + ab_1$	$b_0 = -\dfrac{a_0}{a}$

La redondance des deux dernières colonnes permettant de vérifier ses calculs...

Exemple 18 : Soit la fonction polynômiale définie par
$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \quad \text{avec} \quad a = 1.$$

L'algorithme d'Hörner s'écrit :

	1	5	5	-5	-6
(Calcul de b_3)	1				
(Calcul de b_2)	1	$6 = 5 + 1 \times 1$			
(Calcul de b_1)	1	6	$11 = 5 + 1 \times 6$		
(Calcul de b_0)	1	6	11	6	$-\dfrac{-6}{1} = 6$

On retrouve : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$.

Et on continue avec $a = -1$:

	1	6	11	6
(Avec $a = -1$)	1	5	6	6
(Avec $a = -2$)	1	3	3	

On retrouve encore, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x+1)(x^2+5x+6) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2)(x+3). \end{aligned}$$

Exercice 17 : Factoriser $\mathrm{P} = 4\mathrm{X}^3 - 16\mathrm{X}^2 - 19\mathrm{X} - 5$ à l'aide de l'algorithme de Hörner sachant que 5 est une des racines.

VI Somme et produit des racines

VI.1 Degré 2

Proposition 25 : Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$ avec $a \in \mathbb{K}^*$.

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont racines de P si, et seulement si } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Exemple 19 : $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad (X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}\,(\alpha) + |\alpha|^2.$

En particulier : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1.$

VI.2 Cas général

Considérons $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.

Posons $P = a_n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$ (les α_i éventuellement identiques en cas de racines multiples).

En développant, on a $P = a_n\left(X^n - (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\right)$

En identifiant, on a (entre autres) $\begin{cases} a_{n-1} = -a_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) \\ a_0 = a_n(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \end{cases}$.

On peut donc trouver facilement la somme et le produit des racines ainsi que d'autres sommes remarquables :

Proposition 26 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de degré n *i.e.* $a_n \neq 0$.

Si α_1, α_2, ..., α_n sont les racines de P alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i\alpha_j = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_p} = (-1)^p\dfrac{a_{n-p}}{a_n} \\ \dots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Exemple 20 : Soit $n \geqslant 2$. On a vu que $X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n}(X - \zeta)$.

Donc $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = 0$: la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle.

Exercice 18 : Soient a, b, c les trois racines complexes de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,
2. $ab + ac + bc$,
3. abc,
4. $a^2 + b^2 + c^2$,
5. $a^3 + b^3 + c^3$,
6. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$,
7. $a^7 + b^7 + c^7$.