Polynômes

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 20

Sommaire I

Sommaire II

Avant de s'attaquer vraiment à l'algèbre linéaire, ce chapitre servira d'introduction par l'exemple aux concepts plus généraux développés ensuite dans toute leur généralité sur les espaces vectoriels.

Ce chapitre sera également l'occasion de croiser sous sa forme originale et épurée une formule d'importance capitale en analyse, et que nous retrouverons sous d'autres formes à plusieurs reprises ensuite : la formule de Taylor.

Dans toute ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Définition 1 :

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **nulle à partir d'un certain rang**.

On note $\mathbb{K}[X]$ leur ensemble.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Définition 1 :

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **nulle à partir d'un certain rang**.

On note $\mathbb{K}[X]$ leur ensemble.

$$\forall\, P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X],\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ a_n = 0.$$

Remarque : N peut être aussi grand que l'on veut, mais il est toujours fini.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Définition 1 :

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **nulle à partir d'un certain rang**.

On note $\mathbb{K}[X]$ leur ensemble.

$$\forall\, P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X],\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ a_n = 0.$$

Remarque : N peut être aussi grand que l'on veut, mais il est toujours fini.

Exemple 1 :

$(1, -2, 3, 0, 4, 0, 0, \ldots) = 1 - 2X + 3X^2 + 4X^5$.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Vocabulaire :

- Pour n fixé, a_n est le n+1ème coefficient du polynôme.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Vocabulaire :

- Pour n fixé, a_n est le n+1ème coefficient du polynôme.
- On note X le polynôme défini par $X = (0, 1, 0, 0, ...)$ c'est-à-dire défini par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \geqslant 2, a_n = 0.$$

Vocabulaire :

- Pour n fixé, a_n est le n+1$^{\text{ème}}$ coefficient du polynôme.
- On note X le polynôme défini par $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ c'est-à-dire défini par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \geqslant 2, a_n = 0.$$

ATTENTION X n'est pas un nombre !

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Vocabulaire :

- Pour n fixé, a_n est le n+1$^{\text{ème}}$ coefficient du polynôme.
- On note X le polynôme défini par $X = (0, 1, 0, 0, ...)$ c'est-à-dire défini par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \geqslant 2, a_n = 0.$$

ATTENTION X n'est pas un nombre !

- On appelle polynôme constant, tout polynôme de la forme $(\lambda, 0, 0, ...)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
  On le notera abusivement λ.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Vocabulaire :

- Pour n fixé, a_n est le n+1$^{\text{ème}}$ coefficient du polynôme.
- On note X le polynôme défini par $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ c'est-à-dire défini par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \geqslant 2, a_n = 0.$$

ATTENTION X n'est pas un nombre !

- On appelle polynôme constant, tout polynôme de la forme $(\lambda, 0, 0, \ldots)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
  On le notera abusivement λ.
- Le polynôme défini par la suite nulle $(0, 0, \ldots)$ est appelé polynôme nul et noté $0_{\mathbb{K}[X]}$, ou dangereusement 0.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

Vocabulaire :

- Pour n fixé, a_n est le n+1$^{\text{ème}}$ coefficient du polynôme.
- On note X le polynôme défini par $\mathrm{X} = (0, 1, 0, 0, ...)$ c'est-à-dire défini par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \geqslant 2, a_n = 0.$$

ATTENTION X n'est pas un nombre !

- On appelle polynôme constant, tout polynôme de la forme $(\lambda, 0, 0, ...)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
  On le notera abusivement λ.
- Le polynôme défini par la suite nulle $(0, 0, ...)$ est appelé polynôme nul et noté $0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}$, ou dangereusement 0.

Par définition, un polynôme est donc nul si, et seulement si tous ses coefficients sont nuls :

$$\forall\ \mathrm{P} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P} \equiv 0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]} \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = 0.$$

Définition 2 (Somme de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle somme des polynômes P et Q, notée $P + Q$, le polynôme défini par :

$$P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Définition 2 (Somme de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle somme des polynômes P et Q, notée $P + Q$, le polynôme défini par :

$$P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La loi $+$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (P\,;Q) & \longmapsto & P + Q \end{array}$

est appelée loi de composition interne (à $\mathbb{K}[X]$).

Proposition 1 :

L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R = P+(Q+R) = P+Q+R$.

Proposition 1 :

L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X],\ (P+Q)+R = P+(Q+R) = P+Q+R.$

est commutative : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P+Q = Q+P.$

Proposition 1 :

L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R = P+(Q+R) = P+Q+R$.

est commutative : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P+Q = Q+P$.

admet un élément neutre : le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \ldots)$ vérifie :

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$

Proposition 1 :

L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R = P+(Q+R) = P+Q+R$.

est commutative : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P+Q = Q+P$.

admet un élément neutre : le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \ldots)$ vérifie :

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$

est symétrisable : Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un symétrique, noté $-P$, et défini par $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$P + (-P) = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Proposition 1 :

L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R = P+(Q+R) = P+Q+R$.

est commutative : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P+Q = Q+P$.

admet un élément neutre : le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \ldots)$ vérifie :

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$

est symétrisable : Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un symétrique, noté $-P$, et défini par $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$P + (-P) = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Proposition 1 :

L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R = P+(Q+R) = P+Q+R$.

est commutative : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P+Q = Q+P$.

admet un élément neutre : le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \ldots)$ vérifie :

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$

est symétrisable : Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un symétrique, noté $-P$, et défini par $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$P + (-P) = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Toutes ces propriétés découlent de celles de $\mathbb{K}$.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

1. Opérations sur $\mathbb{K}[X]$

Proposition 1 :

L'addition dans $\mathbb{K}[X]$:

est associative : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R = P+(Q+R) = P+Q+R$.

est commutative : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P+Q = Q+P$.

admet un élément neutre : le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \ldots)$ vérifie :

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$

est symétrisable : Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un symétrique, noté $-P$, et défini par $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$P + (-P) = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Toutes ces propriétés découlent de celles de $\mathbb{K}$.

Vocabulaire : On dit que $\left(\mathbb{K}[X], +\right)$ est un groupe commutatif (ou abélien)

Corollaire I.1 :

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\forall\ P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X], \quad P \equiv_{\mathbb{K}[X]} Q \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n =_{\mathbb{K}} b_n.$$

En convenant toujours que ces coefficients sont tous nuls à partir d'un certain rang.

Définition 3 (Loi externe) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit le produit d'un polynôme par un scalaire, noté $\lambda.P$ ou λP, le polynôme défini par :

$$\lambda.P = (\lambda \times a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

1. Opérations sur $\mathbb{K}[X]$

Définition 3 (Loi externe) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit le produit d'un polynôme par un scalaire, noté $\lambda.P$ ou λP, le polynôme défini par :

$$\lambda.P = (\lambda \times a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\text{La loi } \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (\lambda\,;P) & \longmapsto & \lambda\cdot P \end{array}$$

est alors qualifiée de loi de composition externe (à $\mathbb{K}[X]$).

Définition 3 (Loi externe) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit le produit d'un polynôme par un scalaire, noté $\lambda.P$ ou λP, le polynôme défini par :

$$\lambda.P = (\lambda \times a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\text{La loi } \cdot : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (\lambda\,;P) & \longmapsto & \lambda \cdot P \end{array}$$

est alors qualifiée de loi de composition externe (à $\mathbb{K}[X]$).

Corollaire 1.4 :

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est stable par combinaisons linéaires.

Définition 3 (Loi externe) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit le produit d'un polynôme par un scalaire, noté $\lambda.P$ ou λP, le polynôme défini par :

$$\lambda.P = (\lambda \times a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\text{La loi } \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (\lambda\,;P) & \longmapsto & \lambda\cdot P \end{array}$$

est alors qualifiée de loi de composition externe (à $\mathbb{K}[X]$).

Corollaire I.5 :

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est stable par combinaisons linéaires.

Vocabulaire : On dit que $\Big(\mathbb{K}[X], +, \cdot\Big)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

À ce stade, il nous reste à pouvoir multiplier des polynômes entre eux et avoir quelque chose qui ressemble à

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{2n} \left(a_0 b_k + \ldots + a_k b_0\right) X^k = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k,$$

calcul au sein duquel on a simplement regroupé les termes degré par degré. Il ne nous reste plus qu'à forcer le destin.

Définition 4 (Produit de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle produit des polynômes P et Q, notée $P \times Q$ ou plus simplement PQ, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Définition 4 (Produit de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle produit des polynômes P et Q, notée $P \times Q$ ou plus simplement PQ, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vocabulaire : La suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 4 (Produit de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle produit des polynômes P et Q, notée $P \times Q$ ou plus simplement PQ, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vocabulaire : La suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En particulier, on a :

- $c_0 = a_0 b_0$

Définition 4 (Produit de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle produit des polynômes P et Q, notée $P \times Q$ ou plus simplement PQ, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vocabulaire : La suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En particulier, on a :

- $c_0 = a_0 b_0$
- $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$

Définition 4 (Produit de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle produit des polynômes P et Q, notée $P \times Q$ ou plus simplement PQ, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vocabulaire : La suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En particulier, on a :

- $c_0 = a_0 b_0$
- $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$
- $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$

Définition 4 (Produit de polynômes) :

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle produit des polynômes P et Q, notée $P \times Q$ ou plus simplement PQ, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vocabulaire : La suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En particulier, on a :

- $c_0 = a_0 b_0$
- $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$
- $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$
- ...

Remarque importante :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.} \tag{1}$$

Remarque importante :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.} \tag{1}$$

Comme l'addition, la loi $\times$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (P\,;Q) & \longmapsto & P \times Q \end{array}$ est aussi une loi de composition interne.

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X],\ (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R.$

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X], (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R.$

est commutatif : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], P \times Q = Q \times P.$

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R$.

est commutatif : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \times Q = Q \times P$.

admet un élément neutre : le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, ...)$.

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R$.

est commutatif : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \times Q = Q \times P$.

admet un élément neutre : le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \ldots)$.

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

est distributif sur l'addition : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,

$$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R.$$

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P,\, Q,\, R \in \mathbb{K}[X],\ (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R.$

est commutatif : $\forall\, P,\, Q \in \mathbb{K}[X],\ P \times Q = Q \times P.$

admet un élément neutre : le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1,\, 0,\, 0,\, \ldots).$

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

est distributif sur l'addition : $\forall\, P,\, Q,\, R \in \mathbb{K}[X],$
$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R.$

est compatible avec la loi externe :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \lambda.(P \times Q) = (\lambda.P) \times Q = P \times (\lambda.Q)$$

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R$.

est commutatif : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \times Q = Q \times P$.

admet un élément neutre : le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \ldots)$.

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

est distributif sur l'addition : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,
$$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R.$$

est compatible avec la loi externe :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \lambda.(P \times Q) = (\lambda.P) \times Q = P \times (\lambda.Q)$$

On dit que $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ est un anneau commutatif et que $\left(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\right)$ est une algèbre commutative (unitaire) sur $\mathbb{K}$.

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R$.

est commutatif : $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \times Q = Q \times P$.

admet un élément neutre : le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, ...)$.

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

est distributif sur l'addition : $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,
$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

est compatible avec la loi externe :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \lambda.(P \times Q) = (\lambda.P) \times Q = P \times (\lambda.Q)$$

ATTENTION $\Big(\mathbb{K}[X], \times\Big)$ n'est pas un groupe !

Proposition 2 :

Le produit dans $\mathbb{K}[X]$:

est associatif : $\forall\, P,\, Q,\, R \in \mathbb{K}[X],\ (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R) = P \times Q \times R.$

est commutatif : $\forall\, P,\, Q \in \mathbb{K}[X],\ P \times Q = Q \times P.$

admet un élément neutre : le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1,\, 0,\, 0,\, ...)$.

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

est distributif sur l'addition : $\forall\, P,\, Q,\, R \in \mathbb{K}[X]$,
$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R.$

est compatible avec la loi externe :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \lambda.(P \times Q) = (\lambda.P) \times Q = P \times (\lambda.Q)$$

ATTENTION

On le démontrera plus loin mais les seuls polynômes inversibles pour la loi $\times$ sont les polynômes constants non nuls.

Définition/Théorème 5 (Notation définitive) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite des monômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} X^0 = (1,\, 0,\, 0,\, ...) \\ X^{n+1} = X^n \times X \end{cases}$$

Définition/Théorème 5 (Notation définitive) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite des monômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} X^0 = (1,\, 0,\, 0,\, \ldots) \\ X^{n+1} = X^n \times X \end{cases}$$

$X = (0,\, 1,\, 0,\, \ldots)$ est appelée l'indéterminée et,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X^n = (0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \underset{(n+1)^{\text{ème}}\ \text{coefficient}}{\underset{\uparrow}{1}},\, 0,\, \ldots) \qquad (2)$$

Définition/Théorème 5 (Notation définitive) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite des monômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} X^0 = (1, 0, 0, \ldots) \\ X^{n+1} = X^n \times X \end{cases}$$

$X = (0, 1, 0, \ldots)$ est appelée l'indéterminée et,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X^n = (0, 0, \ldots, 0, \underset{(n+1)^{\text{ème}}\text{ coefficient}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \ldots) \tag{2}$$

Tout $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit alors :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k.$$

Définition/Théorème 5 (Notation définitive) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite des monômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} X^0 = (1,\, 0,\, 0,\, \dots) \\ X^{n+1} = X^n \times X \end{cases}$$

$X = (0,\, 1,\, 0,\, \dots)$ est appelée l'indéterminée et,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X^n = (0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, \underset{(n+1)^{\text{ème}} \text{ coefficient}}{\underset{\uparrow}{1}},\, 0,\, \dots) \tag{2}$$

Tout $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit alors :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Vocabulaire : On appelle monôme tout polynôme de la forme $a_k X^k$ où $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$.

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- $\sum a_n X^n$,

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\sum a_n X^n$,
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\sum a_n X^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,
- $P(X)$,

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\sum a_n X^n$,
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,
- $P(X)$,
- $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$,

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\sum a_n X^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,
- $P(X)$,
- $\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$,
- ou $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$,

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\sum a_n X^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,
- $P(X)$,
- $\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$,
- ou $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$,

en convenant toujours que $\forall\, k > n,\ a_k = 0$ *i.e.* la somme est finie et on écrira toujours un polynôme dans l'ordre croissant ou décroissant des puissances de X.

Remarque : On adopte diverses notations pour un polynôme comme

- $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\sum a_n X^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,
- $P(X)$,
- $\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$,
- ou $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$,

en convenant toujours que $\forall\, k > n,\ a_k = 0$ *i.e.* la somme est finie et on écrira toujours un polynôme dans l'ordre croissant ou décroissant des puissances de X.

ATTENTION X n'est pas un nombre !

Définition 6 (Composition) :

Soient $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme composé Q par P, noté $P \circ Q$, le polynôme $P \circ Q = \sum_{k \geqslant 0} a_k Q^k$.

Définition 6 (Composition) :

Soient $P = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme composé Q par P, noté $P \circ Q$, le polynôme $P \circ Q = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} a_k Q^k$.

Remarque : Si $Q = X + a$ où $a \in \mathbb{K}$ et $P = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ alors

$$P \circ Q = P(X + a) = \sum_{k \geqslant 0} a_k (X + a)^k.$$

Exemples 2 (Opérations dans $\mathbb{K}[X]$) :

Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$.

Somme : $P + Q = 1 + 4X$.

Exemples 2 (Opérations dans $\mathbb{K}[X]$) :

Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$.

Somme : $P + Q = 1 + 4X$.

Loi externe : $2P = 2 + 6X - 2X^2$.

Exemples 2 (Opérations dans $\mathbb{K}[X]$) :

Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$.

Somme : $P + Q = 1 + 4X$.

Loi externe : $2P = 2 + 6X - 2X^2$.

Produit :

k	0	1	2	3	4
a_k	1	3	-1		
b_k	0	1	1		
c_k	0	1	4	2	-1

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_0 = a_0 b_0 = 0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 4 \\ c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 2 \\ c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -1 \end{cases}$$

$$PQ = X + 4X^2 + 2X^3 - X^4.$$

Exemples 2 (Opérations dans $\mathbb{K}[X]$) :

Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$.

Somme : $P + Q = 1 + 4X$.

Loi externe : $2P = 2 + 6X - 2X^2$.

Produit :

k	0	1	2	3	4
a_k	1	3	-1		
b_k	0	1	1		
c_k	0	1	4	2	-1

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_0 = a_0b_0 = 0 \\ c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 1 \\ c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 4 \\ c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 2 \\ c_4 = a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 = -1 \end{cases}$$

$$PQ = X + 4X^2 + 2X^3 - X^4.$$

Composition : $P \circ Q = 1 + 3(X + X^2) - (X + X^2)^2 = 1 + 3X - 2X^2 - 2X^3 - X^4$.

Exercice 1 :

Soient $P(X) = X^2 + 3X - 2$ et $Q(X) = 6X - X^2 + 1$.

Déterminer $P + Q, 3P - 2Q, P^3, PQ$ et $P(Q(X))$.

Proposition 3 (Binôme de Newton) :

Soient P et Q deux polynômes sur $\mathbb{K}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

$$\text{et}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P^n - Q^n = (P-Q)\sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}.$$

Proposition 3 (Binôme de Newton) :

Soient P et Q deux polynômes sur $\mathbb{K}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{P}+\mathrm{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{P}^k \mathrm{Q}^{n-k}$$

$$\text{et}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}^n - \mathrm{Q}^n = (\mathrm{P}-\mathrm{Q}) \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}^k \mathrm{Q}^{n-1-k}.$$

Exemple 3 :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \mathrm{X}^n = (1-\mathrm{X}) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k.$

Proposition 3 (Binôme de Newton) :

Soient P et Q deux polynômes sur $\mathbb{K}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

$$\text{et}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P^n - Q^n = (P-Q)\sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}.$$

Exemple 3 :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - X^n = (1-X)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k.$

Exercice 2 :

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X^3 + X^2 + X + 1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1.$$

Définition 7 :

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

On appelle **degré de P** et on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

Définition 7 :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

On appelle **degré de P** et on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

On convient que $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$.

Définition 7 :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

On appelle **degré de P** et on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

On convient que $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$.

Exemple 4 :

Si $P = X^2 + 5X^3 + X^9$, on a $\deg(P) = 9$.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$
2. Degré d'un polynôme

Remarques :

- si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$. Ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$.
  Le coefficient a_n s'appelle alors le coefficient dominant, $a_n X^n$ le monôme dominant.

Remarques :

- si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$. Ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$.
  Le coefficient a_n s'appelle alors le coefficient dominant, $a_n X^n$ le monôme dominant.
- On dit que P est unitaire ou normalisé si $P \neq 0$ et si son coefficient dominant est égal à 1.

Remarques :

- si $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, on n'a pas nécessairement $\deg(\mathrm{P}) = n$. Ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$.
  Le coefficient a_n s'appelle alors le coefficient dominant, $a_n \mathrm{X}^n$ le monôme dominant.
- On dit que P est unitaire ou normalisé si $\mathrm{P} \neq 0$ et si son coefficient dominant est égal à 1.
- Si $\mathrm{P} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le polynôme nul alors, par définition, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.
  De fait, il n'existe pas d'entier n tel que $a_n \neq 0$. C'est la raison de la définition ci-dessus.

Remarques :

- si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$. Ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$.
  Le coefficient a_n s'appelle alors le coefficient dominant, $a_n X^n$ le monôme dominant.
- On dit que P est unitaire ou normalisé si $P \neq 0$ et si son coefficient dominant est égal à 1.
- Si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le polynôme nul alors, par définition, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.
  De fait, il n'existe pas d'entier n tel que $a_n \neq 0$. C'est la raison de la définition ci-dessus.

Remarques :

- si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$. Ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$.
  Le coefficient a_n s'appelle alors le coefficient dominant, $a_n X^n$ le monôme dominant.
- On dit que P est unitaire ou normalisé si $P \neq 0$ et si son coefficient dominant est égal à 1.
- Si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le polynôme nul alors, par définition, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$. De fait, il n'existe pas d'entier n tel que $a_n \neq 0$. C'est la raison de la définition ci-dessus.

ATTENTION

- Les polynômes constants ont un degré $\leqslant 0$.

Remarques :

- si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$. Ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$.
  Le coefficient a_n s'appelle alors le coefficient dominant, $a_n X^n$ le monôme dominant.
- On dit que P est unitaire ou normalisé si $P \neq 0$ et si son coefficient dominant est égal à 1.
- Si $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le polynôme nul alors, par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. De fait, il n'existe pas d'entier n tel que $a_n \neq 0$. C'est la raison de la définition ci-dessus.

ATTENTION

- Les polynômes constants ont un degré $\leqslant 0$.
- Les polynômes de degré nul sont les polynômes constants non nuls.

Proposition 4 :

1. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

2. Degré d'un polynôme

Proposition 4 :

1. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$

Proposition 4 :

1. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$

Proposition 4 :

1. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$
4. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$

Proposition 4 :

1. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$
4. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$

Exercice 3 :

Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^3 - X(X - 2 + i)^2$

Proposition 4 :

1. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$
4. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$

Exercice 3 :

Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^3 - X(X-2+i)^2$
2. $P_2(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 4.1 :

1. Les seuls polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.

Corollaire 4.2 :

1. Les seuls polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$.

Corollaire 4.3 :

1. Les seuls polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$.

Vocabulaire : On dit que $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ est un anneau intègre.

Définition 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Définition 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition 5 :

$\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires.

Définition 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition 5 :

$\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires.

Exercice 4 :

Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on définit $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

Calculer $f\left(X^3\right), f\left(X^2\right), f(X)$ et $f(1)$ puis montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Depuis le chapitre sur le calcul matriciel, on sait qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont encore des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note alors $P(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{p} a_i M^i = a_p M^p + ... + a_1 M + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Depuis le chapitre sur le calcul matriciel, on sait qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont encore des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note alors $P(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{p} a_i M^i = a_p M^p + \ldots + a_1 M + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition/Théorème 9 :

- Un polynôme en M commute avec la matrice M : $P(M) \times M = M \times P(M)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Depuis le chapitre sur le calcul matriciel, on sait qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont encore des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note alors $P(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{p} a_i M^i = a_p M^p + \ldots + a_1 M + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition/Théorème 9 :

- Un polynôme en M commute avec la matrice M : $P(M) \times M = M \times P(M)$.
- Lorsque $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, on dit que P est un polynôme annulateur de M.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Depuis le chapitre sur le calcul matriciel, on sait qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont encore des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note alors $P(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{p} a_i M^i = a_p M^p + \ldots + a_1 M + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition/Théorème 9 :

- Un polynôme en M commute avec la matrice M : $P(M) \times M = M \times P(M)$.
- Lorsque $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, on dit que P est un polynôme annulateur de M.
- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Alors,

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Depuis le chapitre sur le calcul matriciel, on sait qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont encore des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note alors $P(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{p} a_i M^i = a_p M^p + \ldots + a_1 M + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition/Théorème 9 :

- Un polynôme en M commute avec la matrice M : $P(M) \times M = M \times P(M)$.
- Lorsque $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, on dit que P est un polynôme annulateur de M.
- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Alors,
  - $(P \times_{\mathbb{K}[X]} Q)(M) = P(M) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} Q(M)$,

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Depuis le chapitre sur le calcul matriciel, on sait qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont encore des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note alors $P(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(M) = \sum_{i=0}^{p} a_i M^i = a_p M^p + \ldots + a_1 M + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition/Théorème 9 :

- Un polynôme en M commute avec la matrice M : $P(M) \times M = M \times P(M)$.
- Lorsque $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, on dit que P est un polynôme annulateur de M.
- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Alors,
  - $(P \times_{\mathbb{K}[X]} Q)(M) = P(M) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} Q(M)$,
  - $(\lambda \cdot_{\mathbb{K}[X]} P +_{\mathbb{K}[X]} Q)(M) = \lambda \cdot_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} P(M) +_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} Q(M)$.

Définition/Théorème 9 :

- Un polynôme en M commute avec la matrice M : $P(M) \times M = M \times P(M)$.
- Lorsque $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, on dit que P est un polynôme annulateur de M.
- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Alors,
  - $(P \times_{\mathbb{K}[X]} Q)(M) = P(M) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} Q(M)$,
  - $(\lambda \cdot_{\mathbb{K}[X]} P +_{\mathbb{K}[X]} Q)(M) = \lambda \cdot_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} P(M) +_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} Q(M)$.

Corollaire 5.1 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors,

$$P(M) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} Q(M) = Q(M) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} P(M).$$

Exercice 5 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 + A - 2I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

II. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 10 :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme dérivé de P, noté P', le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

II. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

1. Polynôme dérivé

Définition 10 :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme dérivé de P, noté P', le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

On définit également, par récurrence, le polynôme dérivé k-ième de P, noté $P^{(k)}$, par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'. \end{cases}$$

II. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

1. Polynôme dérivé

Définition 10 :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme dérivé de P, noté P', le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

On définit également, par récurrence, le polynôme dérivé k-ième de P, noté $P^{(k)}$, par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'. \end{cases}$$

Remarque : Il s'agit d'une dérivation formelle : il n'y a pas de question à se poser sur la dérivabilité d'un polynôme comme pour les fonctions de la variable réelle.

Définition 10 :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme dérivé de P, noté P', le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

On définit également, par récurrence, le polynôme dérivé k-ième de P, noté $P^{(k)}$, par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'. \end{cases}$$

Remarque : Il s'agit d'une dérivation formelle : il n'y a pas de question à se poser sur la dérivabilité d'un polynôme comme pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 5 :

$(1 + 3X - X^2)' = 3 - 2X \qquad$ et $\qquad (20)' = 0.$

Proposition 6 :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leqslant 0 \end{cases}$$

Proposition 6 :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leqslant 0 \end{cases}$$

En particulier, $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P) \leqslant n \implies P^{(n+1)} = 0$

Proposition 6 :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leqslant 0 \end{cases}$$

En particulier, $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P) \leqslant n \implies P^{(n+1)} = 0$

Remarque : $\forall\, P \in \mathbb{K}[X]$, $P' = 0 \iff \deg(P) \leqslant 0 \iff P$ est constant.

Proposition 7 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'.$

Proposition 7 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'.$
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)' = P'Q + PQ'.$

Proposition 7 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'.$
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)' = P'Q + PQ'.$
3. $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (P^n)' = nP' \times P^{n-1}.$

Proposition 7 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'.$
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)' = P'Q + PQ'.$
3. $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (P^n)' = nP' \times P^{n-1}.$

La dérivation des polynômes est donc, comme pour les fonctions, linéaire

Proposition 7 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$.
3. $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (P^n)' = nP' \times P^{n-1}$.

La dérivation des polynômes est donc, comme pour les fonctions, linéaire

Exercice 6 :

Déterminer les polynômes :

1. $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(1 - X)P' - P = X^n$.

Proposition 7 :

1. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$.
3. $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (P^n)' = nP' \times P^{n-1}$.

La dérivation des polynômes est donc, comme pour les fonctions, linéaire

Exercice 6 :

Déterminer les polynômes :

1. $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(1-X)P' - P = X^n$.
2. $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P' - 6P = 0$.

En généralisant,

Proposition 8 :

1. $\forall\, P,\, Q \in \mathbb{K}[X],\, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}[X],\, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}.$

En généralisant,

Proposition 8 :

1. $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}.$
2. $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$

Formule de Leibniz

Définition II :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $n \in \mathbb{N}$.

La **fonction polynomiale associée à P** est la fonction définie par

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

II. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

4. Fonction polynomiale associée à un polynôme

Définition II :

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $n \in \mathbb{N}$.

La **fonction polynomiale associée à P** est la fonction définie par

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$f = \widetilde{P}.$$

Définition II :

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $n \in \mathbb{N}$.

La fonction polynomiale associée à P est la fonction définie par

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

On appelle fonction polynomiale toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$f = \widetilde{P}.$$

L'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est ici noté $\mathrm{P}ol(\mathbb{K})$.

Exemple 6 :

Si $P = X^2 + 1$, alors $\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$.

Exemple 6 :

Si $P = X^2 + 1$, alors $\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$.

Par construction,

Corollaire 8.2 :

L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathrm{P}ol(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$ est surjective.

Exemple 6 :

Si $P = X^2 + 1$, alors $\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$.

Par construction,

Corollaire 8.3 :

$$\text{L'application } \Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathrm{P}ol(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array} \text{ est surjective.}$$

ATTENTION

X n'est toujours pas un nombre ! On ne dit pas « Posons $X = 1$ », mais « Évaluons en 1 ».

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\lambda\widetilde{P + \mu}Q = \lambda\widetilde{P} + \widetilde{Q}$.

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\lambda\widetilde{P + \mu} Q = \lambda \widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda\widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.
3. $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.
3. $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
4. $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$.

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda\widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.
3. $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
4. $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$.

ATTENTION

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont dotés de notions différentes d'addition, multiplication, composition et dérivation.

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.
3. $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
4. $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$.

ATTENTION

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont dotés de notions différentes d'addition, multiplication, composition et dérivation.

Dans la formule $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$ par exemple, ce ne sont pas les mêmes « $\circ$ » qu'on trouve à gauche et à droite.

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.
3. $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
4. $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$.

ATTENTION

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont dotés de notions différentes d'addition, multiplication, composition et dérivation.

Dans la formule $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$ par exemple, ce ne sont pas les mêmes « $\circ$ » qu'on trouve à gauche et à droite.

Pire, dans la formule $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$, la dérivée P' est une dérivée formelle alors que la dérivée $\widetilde{P}'$ est la dérivée d'une fonction définie comme limite d'un taux d'accroissement.

Proposition 9 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda\widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
2. $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$.
3. $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
4. $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$.

ATTENTION

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont dotés de notions différentes d'addition, multiplication, composition et dérivation.

Dans la formule $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$ par exemple, ce ne sont pas les mêmes « $\circ$ » qu'on trouve à gauche et à droite.

Pire, dans la formule $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$, la dérivée P' est une dérivée formelle alors que la dérivée $\widetilde{P}'$ est la dérivée d'une fonction définie comme limite d'un taux d'accroissement.

Sachant que $\widetilde{1}$ est la fonction constante $x \longmapsto 1$, élément neutre de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ l'application $P \longmapsto \widetilde{P}$ s'avère être un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.

Théorème 10 (Théorème de Taylor) :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \\ &= \widetilde{P}(a) + \widetilde{P}'(a)(X-a) + \frac{\widetilde{P}''(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{\widetilde{P}^{(p)}(a)}{p!}(X-a)^p. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ étant ce qu'on appelle un espace vectoriel de dimension $n+1$ (on expliquera cela plus tard), on peut décrire un polynôme de degré n en donnant $n+1$ réels.

On peut le faire d'au moins trois façons :

1. donner les coefficients du polynôme. C'est la façon la plus classique de procéder, mais l'information donnée est finalement assez peu commode à exploiter autrement que très globalement (que signifie le fait qu'un polynôme de degré 8 a un coefficient de degré 3 égal à 5 ? Essentiellement rien).

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ étant ce qu'on appelle un espace vectoriel de dimension $n+1$ (on expliquera cela plus tard), on peut décrire un polynôme de degré n en donnant $n+1$ réels.

On peut le faire d'au moins trois façons :

1. donner les coefficients du polynôme. C'est la façon la plus classique de procéder, mais l'information donnée est finalement assez peu commode à exploiter autrement que très globalement (que signifie le fait qu'un polynôme de degré 8 a un coefficient de degré 3 égal à 5 ? Essentiellement rien).
2. donner les valeurs du polynôme en $n+1$ réels distincts. Nous détaillerons sûrement cette méthode dans un devoir sur les polynômes dits de Lagrange qui donne une information très concrète mais éparpillée à $n+1$ endroits différents.

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ étant ce qu'on appelle un espace vectoriel de dimension $n+1$ (on expliquera cela plus tard), on peut décrire un polynôme de degré n en donnant $n+1$ réels.

On peut le faire d'au moins trois façons :

1. donner les coefficients du polynôme. C'est la façon la plus classique de procéder, mais l'information donnée est finalement assez peu commode à exploiter autrement que très globalement (que signifie le fait qu'un polynôme de degré 8 a un coefficient de degré 3 égal à 5 ? Essentiellement rien).
2. donner les valeurs du polynôme en $n+1$ réels distincts. Nous détaillerons sûrement cette méthode dans un devoir sur les polynômes dits de Lagrange qui donne une information très concrète mais éparpillée à $n+1$ endroits différents.
3. la troisième méthode que nous venons de voir concentre réellement toute l'information au même endroit, puisque la formule de Taylor reconstitue le polynôme à partir des valeurs de ses différentes dérivées en un même réel a.

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{(x-1)^3}$.

Imaginons que nous voulions effecteur sa décomposition en éléments simples dans le but de calculer une primitive de f par exemple.

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \dfrac{2x^3+2x^2+3x-4}{(x-1)^3}$.

Imaginons que nous voulions effecteur sa décomposition en éléments simples dans le but de calculer une primitive de f par exemple.

On souhaite donc écrire $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2} + \dfrac{d}{(x-1)^3}$.

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{(x-1)^3}$.

Imaginons que nous voulions effecteur sa décomposition en éléments simples dans le but de calculer une primitive de f par exemple.

On souhaite donc écrire $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2} + \dfrac{d}{(x-1)^3}$.

Il suffirait de savoir écrire $2x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ sous la forme $a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ pour conclure.

La formule de Taylor permet d'éviter les développements, l'identification, et la résolution du système.

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{(x-1)^3}$.

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{P} = 2\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 4 & \text{donc } \mathrm{P}(1) = 3 \\
\mathrm{P}' = 6\mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 3 & \text{donc } \mathrm{P}'(1) = 13 \\
\mathrm{P}'' = 12\mathrm{X} + 4 & \text{donc } \mathrm{P}''(1) = 16 \\
\mathrm{P}^{(3)} = 12 & \text{donc } \mathrm{P}^{(3)}(1) = 12
\end{array}$$

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{(x-1)^3}$.

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{P} = 2\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 4 & \text{donc } \mathrm{P}(1) = 3 \\
\mathrm{P}' = 6\mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 3 & \text{donc } \mathrm{P}'(1) = 13 \\
\mathrm{P}'' = 12\mathrm{X} + 4 & \text{donc } \mathrm{P}''(1) = 16 \\
\mathrm{P}^{(3)} = 12 & \text{donc } \mathrm{P}^{(3)}(1) = 12
\end{array}$$

D'après le théorème de Taylor :

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}'(1)(\mathrm{X}-1) + \frac{\mathrm{P}''(1)}{2}(\mathrm{X}-1)^2 + \frac{\mathrm{P}^{(3)}(1)}{3!}(\mathrm{X}-1)^3.$$

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \dfrac{2x^3+2x^2+3x-4}{(x-1)^3}$.

$$
\begin{array}{ll}
P = 2X^3+2X^2+3X-4 & \text{donc } P(1) = 3 \\
P' = 6X^2+4X+3 & \text{donc } P'(1) = 13 \\
P'' = 12X+4 & \text{donc } P''(1) = 16 \\
P^{(3)} = 12 & \text{donc } P^{(3)}(1) = 12
\end{array}
$$

D'après le théorème de Taylor :

$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \dfrac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3.$

D'où $P = 3+13(X-1)+8(X-1)^2+2(X-1)^3$ et $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^3} + \dfrac{13}{(x-1)^2} + \dfrac{8}{x-1} + 2.$

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{(x-1)^3}$.

$$\begin{array}{ll}
P = 2X^3 + 2X^2 + 3X - 4 & \text{donc } P(1) = 3 \\
P' = 6X^2 + 4X + 3 & \text{donc } P'(1) = 13 \\
P'' = 12X + 4 & \text{donc } P''(1) = 16 \\
P^{(3)} = 12 & \text{donc } P^{(3)}(1) = 12
\end{array}$$

D'après le théorème de Taylor :

$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \dfrac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3$.

D'où $P = 3 + 13(X-1) + 8(X-1)^2 + 2(X-1)^3$ et $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^3} + \dfrac{13}{(x-1)^2} + \dfrac{8}{x-1} + 2$.

Exercice 7 :

Donner la décomposition en éléments simples de $f : x \longmapsto \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{(x-2)^3}$.

Corollaire 10.1 :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :

$$P(X+a) = \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n.$$

II. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

5. Formules de Taylor

Corollaire 10.1 :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :

$$P(X+a) = \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n.$$

Théorème 11 (Théorème de Taylor-Mac Laurin) :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :

$$P = \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(0)}{n!} X^n.$$

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1. Divisibilité

Définition 12 :

Soient $A, P \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que **A divise P**, noté $A|P$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.
  On dit alors que A est **un diviseur** de P ou que P est **un multiple** de A.

Définition 12 :

Soient $A, P \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que **A divise P**, noté $A|P$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.
  On dit alors que A est **un diviseur** de P ou que P est **un multiple** de A.
- On dit que A et P sont **associés** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda A$.

Définition 12 :

Soient A, $P \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que **A divise P**, noté $A|P$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.
  On dit alors que A est **un diviseur** de P ou que P est **un multiple** de A.
- On dit que A et P sont **associés** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda A$.

Exemples 8 :

- $X - 1|X^2 - 1$ car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1. Divisibilité

Définition 12 :

Soient $A, P \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que A divise P, noté $A|P$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.
  On dit alors que A est un diviseur de P ou que P est un multiple de A.
- On dit que A et P sont associés s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda A$.

Exemples 8 :

- $X - 1 | X^2 - 1$ car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
- $X - 3$ et $2X - 6$ sont associés car $2X - 6 = 2(X - 3)$.

Définition 12 :

Soient $A, P \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que **A divise P**, noté $A|P$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.
  On dit alors que A est **un diviseur** de P ou que P est **un multiple** de A.
- On dit que A et P sont **associés** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda A$.

Exemples 8 :

- $X-1|X^2-1$ car $X^2-1=(X-1)(X+1)$.
- $X-3$ et $2X-6$ sont associés car $2X-6=2(X-3)$.
- Tous les polynômes divisent le polynôme nul.

Définition 12 :

Soient A, $P \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que **A divise P**, noté $A|P$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.
  On dit alors que A est **un diviseur** de P ou que P est **un multiple** de A.
- On dit que A et P sont **associés** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda A$.

Exemples 8 :

- $X-1|X^2-1$ car $X^2-1=(X-1)(X+1)$.
- $X-3$ et $2X-6$ sont associés car $2X-6=2(X-3)$.
- Tous les polynômes divisent le polynôme nul.
- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad 0|P \iff P=0$.

Proposition 12 :

1. $\forall\, A \in \mathbb{K}[X], \quad A|A$ et $A|0$

Proposition 12 :

1. $\forall\, A \in \mathbb{K}[X], \quad A|A$ et $A|0$
2. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|B \\ B|A \end{cases} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^{\star}, \quad B = \lambda A.$

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1. Divisibilité

Proposition 12 :

1. $\forall\, A \in \mathbb{K}[X], \quad A|A$ et $A|0$
2. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|B \\ B|A \end{cases} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^\star, \quad B = \lambda A.$
3. $\forall\, A, B, C \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|B \\ B|C \end{cases} \implies A|C.$

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1. Divisibilité

Proposition 12 :

1. $\forall\, A \in \mathbb{K}[X], \quad A|A$ et $A|0$
2. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|B \\ B|A \end{cases} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^\star, \quad B = \lambda A.$
3. $\forall\, A, B, C \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|B \\ B|C \end{cases} \implies A|C.$

Remarque : La divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas une relation d'ordre.

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1. Divisibilité

Proposition 13 (Compatibilité avec les opérations) :

1. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad A|P \implies A|PQ$

Proposition 13 (Compatibilité avec les opérations) :

1. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad A|P \implies A|PQ$
2. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ A|Q \end{cases} \implies A|P+Q$

Proposition 13 (Compatibilité avec les opérations) :

1. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad A|P \implies A|PQ$
2. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ A|Q \end{cases} \implies A|P+Q$
3. $\forall\, A, P, B, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ B|Q \end{cases} \implies AB|PQ$

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1. Divisibilité

Proposition 13 (Compatibilité avec les opérations) :

1. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad A|P \implies A|PQ$
2. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ A|Q \end{cases} \implies A|P+Q$
3. $\forall\, A, P, B, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ B|Q \end{cases} \implies AB|PQ$
4. $\forall\, A, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A|P \implies A^n|P^n$

Proposition 13 (Compatibilité avec les opérations) :

1. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad A|P \implies A|PQ$
2. $\forall\, A, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ A|Q \end{cases} \implies A|P+Q$
3. $\forall\, A, P, B, Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} A|P \\ B|Q \end{cases} \implies AB|PQ$
4. $\forall\, A, P \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A|P \implies A^n|P^n$

ATTENTION

$\begin{cases} A|P \\ B|P \end{cases}$ n'implique pas $AB|P$.

Exercice 8 :

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X^2 | (X+1)^n - nX + 1$.

Théorème 14 :

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Théorème 14 :

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Lorsqu'on a obtenu cette écriture, on dit qu'on a effectué la division euclidienne de A par B.

A est le dividende, B le diviseur, Q le quotient et R le reste.

Théorème 14 :

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Lorsqu'on a obtenu cette écriture, on dit qu'on a effectué la division euclidienne de A par B.

A est le dividende, B le diviseur, Q le quotient et R le reste.

Exemple 9 :

$2X^4 - X^3 + 6X^2 + 7X - 14 = (X^2 + X + 1)(2X^2 - 3X + 7) + (3X - 21)$

Exemple 10 :

Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l} X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\ \cline{10-10} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{array}$$

Exemple 10 :

Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
1X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\
\cline{10-10}
-(X^4 & - & X^3) & & & & & & & 1X^3 \\
\cline{1-3}
 & & 6X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 &
\end{array}
$$

Exemple 10 :

Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
1X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\
\cline{10-10}
-(X^4 & - & X^3) & & & & & & & 1X^3 + 6X^2 \\
\cline{1-3}
 & & 6X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & -(6X^3 & - & 6X^2) & & & & & \\
 & & & & 11X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
\end{array}
$$

Exemple 10 :

Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
1X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\ \cline{10-10}
-(X^4 & - & X^3) & & & & & & & 1X^3 + 6X^2 + 11X \\ \cline{1-3}
 & & 6X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & -(6X^3 & - & 6X^2) & & & & & \\
 & & & & 11X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & & & -(11X^2 & - & 11X) & & & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 6X & - & 6 &
\end{array}
$$

Exemple 10 :

Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
1X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\
\cline{10-10}
-(X^4 & - & X^3) & & & & & & & 1X^3 + 6X^2 + 11X + 6 \\
\cline{1-3}
 & & 6X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & -(6X^3 & - & 6X^2) & & & & & \\
 & & & & 11X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & & & -(11X^2 & - & 11X) & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 6X & - & 6 & \\
 & & & & & & -(6X & - & 6) & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Exemple 10 :

Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
1X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\
\cline{10-10}
-(X^4 & - & X^3) & & & & & & & 1X^3 + 6X^2 + 11X + 6 \\
\cline{1-3}
 & & 6X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & -(6X^3 & - & 6X^2) & & & & & \\
 & & & & 11X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & & & -(11X^2 & - & 11X) & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 6X & - & 6 & \\
 & & & & & & -(6X & - & 6) & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

On obtient donc, $P = (X - 1)(X^3 + 6X^2 + 11X + 6)$.

Exemple 10 :

Soit $P = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
1X^4 & + & 5X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & X-1 \\
\cline{10-10}
-(X^4 & - & X^3) & & & & & & & 1X^3+6X^2+11X+6 \\
\cline{1-3}
 & & 6X^3 & + & 5X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & -(6X^3 & - & 6X^2) & & & & & \\
 & & & & 11X^2 & - & 5X & - & 6 & \\
 & & & & -(11X^2 & - & 11X) & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 6X & - & 6 & \\
 & & & & & & -(6X & - & 6) & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

On obtient donc, $P = (X-1)(X^3 + 6X^2 + 11X + 6)$.

Cette méthode de calcul est une alternative à l'identification lorsqu'on cherche à factoriser un polynôme comme ici, par exemple, après avoir trouvé 1 comme racine évidente.

Exercice 9 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.

Exercice 9 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
2. En déduire l'expression de M^2 en fonction de M et de I_3.

Exercice 9 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
2. En déduire l'expression de M^2 en fonction de M et de I_3.
3. On définit le polynôme $P = X^2 + 2X - 3$.

Exercice 9 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
2. En déduire l'expression de M^2 en fonction de M et de I_3.
3. On définit le polynôme $P = X^2 + 2X - 3$.
    1. Déterminer le reste R de la division euclidienne de X^n par P.

Exercice 9 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
2. En déduire l'expression de M^2 en fonction de M et de I_3.
3. On définit le polynôme $P = X^2 + 2X - 3$.
   1. Déterminer le reste R de la division euclidienne de X^n par P.
   2. En déduire M^n

Exercice 9 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
2. En déduire l'expression de M^2 en fonction de M et de I_3.
3. On définit le polynôme $P = X^2 + 2X - 3$.
   1. Déterminer le reste R de la division euclidienne de X^n par P.
   2. En déduire M^n
4. M est-elle inversible ?

La méthode exposée dans l'exercice précédent est générale :

Méthode 1 :

Si P est un polynôme annulateur de la matrice A i.e. si $P(A) = 0$, on écrit la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists\, Q_n, R_n \in \mathbb{K}[X], X^n = Q_n P + R_n \quad \text{et} \quad \deg(R_n) < \deg(P).$$

La méthode exposée dans l'exercice précédent est générale :

Méthode 1 :

Si P est un polynôme annulateur de la matrice A i.e. si $P(A) = 0$, on écrit la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists\, Q_n, R_n \in \mathbb{K}[X], X^n = Q_n P + R_n \quad \text{et} \quad \deg(R_n) < \deg(P).$$

La relation matricielle $A^n = \underbrace{P(A)}_{=0} \times Q_n(A) + R_n(A)$ donne $A^n = R_n(A)$.

La méthode exposée dans l'exercice précédent est générale :

Méthode I :

Si P est un polynôme annulateur de la matrice A i.e. si $P(A) = 0$, on écrit la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists\, Q_n, R_n \in \mathbb{K}[X], X^n = Q_n P + R_n \quad \text{et} \quad \deg(R_n) < \deg(P).$$

La relation matricielle $A^n = \underbrace{P(A)}_{=0} \times Q_n(A) + R_n(A)$ donne $A^n = R_n(A)$. Il suffit donc de connaître R_n.

Proposition 15 :

Soient A et B deux polynômes avec B non nul.

$$B|A \iff \text{le reste dans la division euclidienne de } A \text{ par } B \text{ est nul.}$$

Proposition 15 :

Soient A et B deux polynômes avec B non nul.

$$B|A \iff \text{le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.}$$

Exercice 10 :

Démontrer que $X^2 - 3X + 2$ divise le polynôme $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

Définition 13 :

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible ou premier si :

- $\deg(P) \geqslant 1$

Définition 13 :

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible ou premier si :

- $\deg(P) \geqslant 1$
- P n'admet comme diviseurs que les λ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$) et les μP (avec $\mu \in \mathbb{K}^\star$).

Définition 13 :

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** ou **premier** si :

- $\deg(P) \geqslant 1$
- P n'admet comme diviseurs que les λ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$) et les μP (avec $\mu \in \mathbb{K}^\star$).

ATTENTION

Un même polynôme peut être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$:

- $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Définition 13 :

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** ou **premier** si :

- $\deg(P) \geqslant 1$
- P n'admet comme diviseurs que les λ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$) et les μP (avec $\mu \in \mathbb{K}^\star$).

ATTENTION

Un même polynôme peut être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$:

- $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et donc il est non irréductible.

III. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

3. Polynômes irréductibles

Théorème 16 (Admis) :

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles, unique à l'ordre près des facteurs et aux constantes multiplicatives près.

Théorème 16 (Admis) :

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles, unique à l'ordre près des facteurs et aux constantes multiplicatives près.

On dit que $\mathbb{K}[X]$, tout comme Z, est un anneau *factoriel*.

Théorème 16 (Admis) :

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles, unique à l'ordre près des facteurs et aux constantes multiplicatives près.

On dit que $\mathbb{K}[X]$, tout comme Z, est un anneau *factoriel*.

Exemples 11 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) = \left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)(2X^2+2X+2)$.

Théorème 16 (Admis) :

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles, unique à l'ordre près des facteurs et aux constantes multiplicatives près.

On dit que $\mathbb{K}[X]$, tout comme Z, est un anneau *factoriel*.

Exemples 11 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) = \left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)(2X^2+2X+2)$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-\overline{j}) = \left(\frac{1}{6}X + \frac{1}{6}\right)(2X-2j)(3X-3\overline{j})$.

Corollaire 16.1 :

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet (au moins) un diviseur irréductible.

Corollaire 16.1 :

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet (au moins) un diviseur irréductible.

Proposition 17 :

Les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1 sont irréductibles.

Corollaire 16.1 :

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet (au moins) un diviseur irréductible.

Proposition 17 :

Les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1 sont irréductibles.

Toute la question va être de savoir si la réciproque est vraie ou non *i.e.* les polynômes irréductibles SONT les polynômes de degré 1. Cela va dépendre de $\mathbb{K}$.

IV. Racines d'un polynôme

IV. Racines d'un polynôme

Définition 14 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est une racine de P (ou un zéro P) lorsque $\widetilde{\mathrm{P}}(\alpha) = 0$.

IV. Racines d'un polynôme

Définition 14 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est une racine de P (ou un zéro P) lorsque $\widetilde{\mathrm{P}}(\alpha) = 0$.

Exemple 12 :

1 est une racine de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 1$ car $\widetilde{\mathrm{P}}(x) = x^2 - 1$ et $\widetilde{\mathrm{P}}(1) = 1^2 - 1 = 0$.

IV. Racines d'un polynôme

Définition 14 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est une racine de P (ou un zéro P) lorsque $\widetilde{\mathrm{P}}(\alpha) = 0$.

Exemple 12 :

1 est une racine de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 1$ car $\widetilde{\mathrm{P}}(x) = x^2 - 1$ et $\widetilde{\mathrm{P}}(1) = 1^2 - 1 = 0$.

Théorème 18 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\alpha \text{ est une racine de P} \iff \text{P est divisible par } \mathrm{X} - \alpha.$$

IV. Racines d'un polynôme

Définition 14 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est une racine de P (ou un zéro P) lorsque $\widetilde{\mathrm{P}}(\alpha) = 0$.

Exemple 12 :

1 est une racine de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 1$ car $\widetilde{\mathrm{P}}(x) = x^2 - 1$ et $\widetilde{\mathrm{P}}(1) = 1^2 - 1 = 0$.

Théorème 18 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\alpha \text{ est une racine de P} \iff \text{P est divisible par } \mathrm{X} - \alpha.$$

Remarque : Le reste dans la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - \alpha$ est $\widetilde{\mathrm{P}}(\alpha)$.

IV. Racines d'un polynôme

Corollaire 18.1 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, alors P est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-\alpha_k)$.

Corollaire 18.2 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, alors P est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_k)$.

Exercice 11 :

À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$ divise-t-il $\mathrm{X}^n + 1$?

IV. Racines d'un polynôme

Théorème 19 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.

Alors, P possède au maximum n racines.

IV. Racines d'un polynôme

Théorème 19 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.

Alors, P possède au maximum n racines.

ATTENTION

Dans $\mathbb{R}$, un polynôme de degré n ne possède pas forcément n racines.

IV. Racines d'un polynôme

Théorème 19 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.

Alors, P possède au maximum n racines.

ATTENTION

Dans $\mathbb{R}$, un polynôme de degré n ne possède pas forcément n racines.

Corollaire 19.1 :

1. Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.

Théorème 19 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.

Alors, P possède au maximum n racines.

ATTENTION

Dans $\mathbb{R}$, un polynôme de degré n ne possède pas forcément n racines.

Corollaire 19.1 :

1. Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.
2. Le seul polynôme admettant une infinité de racines et le polynôme nul.

IV. Racines d'un polynôme

Théorème 19 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.

Alors, P possède au maximum n racines.

ATTENTION

Dans $\mathbb{R}$, un polynôme de degré n ne possède pas forcément n racines.

Corollaire 19.1 :

1. Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.
2. Le seul polynôme admettant une infinité de racines et le polynôme nul.

IV. Racines d'un polynôme

Théorème 19 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.

Alors, P possède au maximum n racines.

ATTENTION

Dans $\mathbb{R}$, un polynôme de degré n ne possède pas forcément n racines.

Corollaire 19.1 :

1. Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.
2. Le seul polynôme admettant une infinité de racines et le polynôme nul.

Exemple 13 :

La fonction cos n'est pas polynomiale.

IV. Racines d'un polynôme

Exercice 12 (Polynômes de Tchebychev) :

1. Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\mathrm{T}_0 = 1$, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n$.

Exercice 12 (Polynômes de Tchebychev) :

1. Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\mathrm{T}_0 = 1$, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n$.
2. Calculer T_2, T_3, et T_4.

Exercice 12 (Polynômes de Tchebychev) :

1. Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\mathrm{T}_0 = 1$, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n$.
2. Calculer T_2, T_3, et T_4.
3. Démontrer que $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
   En déduire les racines de T_n.

Proposition 20 :

L'application $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathrm{P}ol(\mathbb{K}) \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \widetilde{\mathrm{P}} \end{array}$ est bijective.

IV. Racines d'un polynôme

1. Identification entre $\mathrm{P}ol(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

Proposition 20 :

L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathrm{P}ol(\mathbb{K}) \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \widetilde{\mathrm{P}} \end{array}$ est bijective.

Chaque fonction polynomiale f est donc associée de manière unique à un et un seul polynôme P.

IV. Racines d'un polynôme

1. Identification entre $\mathrm{P}ol(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$

Proposition 20 :

L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathrm{P}ol(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$ est bijective.

Chaque fonction polynomiale f est donc associée de manière unique à un et un seul polynôme P.

On se permettra donc par la suite d'identifier P et $\widetilde{P}$, ce que l'on avait commencé à faire avec les polynômes constants.

Proposition 20 :

L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathrm{P}ol(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$ est bijective.

Chaque fonction polynomiale f est donc associée de manière unique à un et un seul polynôme P.

On se permettra donc par la suite d'identifier P et $\widetilde{P}$, ce que l'on avait commencé à faire avec les polynômes constants.

On écrira donc en particulier à partir de maintenant $P(\alpha)$ au lieu de $\widetilde{P}(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{K})$.

Corollaire 20.1 (Polynômes de Lagrange) :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux et $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n+1]\!]\,, \quad \mathrm{P}\left(x_i\right) = y_i.$$

Corollaire 20.2 (Polynômes de Lagrange) :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux et $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall\, i \in [\![1\,; n+1]\!]\,, \quad \mathrm{P}\left(x_i\right) = y_i.$$

Il s'agit du polynôme défini par la formule :

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{k \neq i} \frac{(\mathrm{X} - x_k)}{(x_i - x_k)} \right) \cdot y_i$$

Corollaire 20.3 (Polynômes de Lagrange) :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux et $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n+1]\!]\,, \quad \mathrm{P}\,(x_i) = y_i.$$

Il s'agit du polynôme défini par la formule :

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{k \neq i} \frac{(\mathrm{X} - x_k)}{(x_i - x_k)} \right) \cdot y_i$$

Remarque : Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela signifie qu'il existe une unique fonction polynômiale P de degré inférieur au égal à n dont le graphe passe par les $n+1$ points du plan $\mathrm{M}_1\,(x_1, y_1)\,, \dots, \mathrm{M}_{n+1}\,(x_{n+1}, y_{n+1})$.

IV. Racines d'un polynôme

2. Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 15 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si α est une racine de P, on appelle **ordre de multiplicité de la racine α dans P** le plus grand entier n tel que $(X - \alpha)^n | P$.

IV. Racines d'un polynôme

2. Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 15 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si α est une racine de P, on appelle **ordre de multiplicité de la racine α dans P** le plus grand entier n tel que $(X-\alpha)^n | P$.

Remarques :

- Comme α est une racine de P, $E = \{n \in \mathbb{N}, (X-\alpha)^n | P\}$ est non vide, puisque $1 \in E$.
  D'autre part, E est majoré par le degré de P. Donc $E \subset \mathbb{N}$ admet un plus grand élément *i.e.* la multiplicité d'une racine est bien définie.

Définition 15 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si α est une racine de P, on appelle **ordre de multiplicité de la racine α dans P** le plus grand entier n tel que $(\mathrm{X}-\alpha)^n | \mathrm{P}$.

Remarques :

- Comme α est une racine de P, $\mathrm{E} = \{n \in \mathbb{N}, (\mathrm{X}-\alpha)^n | \mathrm{P}\}$ est non vide, puisque $1 \in \mathrm{E}$.
  D'autre part, E est majoré par le degré de P. Donc $\mathrm{E} \subset \mathbb{N}$ admet un plus grand élément *i.e.* la multiplicité d'une racine est bien définie.
- Si la multiplicité de α est 1, 2, 3, ... on parle de racine simple, double, triple. On convient que si l'ordre est 0, α n'est pas une racine de P.

Définition 15 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si α est une racine de P, on appelle **ordre de multiplicité de la racine α dans P** le plus grand entier n tel que $(X - \alpha)^n | P$.

Remarques :

- Comme α est une racine de P, $E = \{n \in \mathbb{N}, (X - \alpha)^n | P\}$ est non vide, puisque $1 \in E$.
  D'autre part, E est majoré par le degré de P. Donc $E \subset \mathbb{N}$ admet un plus grand élément *i.e.* la multiplicité d'une racine est bien définie.
- Si la multiplicité de α est 1, 2, 3, … on parle de racine simple, double, triple. On convient que si l'ordre est 0, α n'est pas une racine de P.
- Par définition de l'ordre de multiplicité, si n est celui d'une racine α alors $(X - \alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

IV. Racines d'un polynôme

2. Ordre de multiplicité d'une racine

Théorème 21 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. α est une racine de P de multiplicité m.

IV. Racines d'un polynôme

2. Ordre de multiplicité d'une racine

Théorème 21 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. α est une racine de P de multiplicité m.
2. $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Théorème 21 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. α est une racine de P de multiplicité m.
2. $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
3. $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Théorème 21 :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. α est une racine de P de multiplicité m.
2. $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
3. $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

À retenir :

On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$, est racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ d'ordre de multiplicité au moins $m \in \mathbb{N}^*$ si $(X-a)^m | P$ ou s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ ou si $\forall\, m \in [\![0\,;m-1]\!]$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$.

Exemples 14 :

- Déterminer les racines de $P = (X-1)(X^2-1)(X^3-1)(X^4-1) \in \mathbb{R}[X]$ et leur multiplicité.

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X^2-1)(X^3-1)(X^4-1) \\ &= (X-1)[(X-1)(X+1)][(X-1)(X^2+X+1)][(X-1)(X+1)(X^2+1)] \\ &= (X-1)^4(X+1)^2(X^2+X+1)(X^2+1) \end{aligned}$$

X^2+X+1 n'a pas de racine réelle ($\Delta = -3$) et X^2+1 non plus.
P a donc deux racines réelles : 1 de multiplicité 4 et -1 de multiplicité 2.

Exemples 14 :

- Déterminer les racines de $P = (X-1)(X^2-1)(X^3-1)(X^4-1) \in \mathbb{R}[X]$ et leur multiplicité.

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X^2-1)(X^3-1)(X^4-1) \\ &= (X-1)[(X-1)(X+1)][(X-1)(X^2+X+1)][(X-1)(X+1)(X^2+1)] \\ &= (X-1)^4(X+1)^2(X^2+X+1)(X^2+1) \end{aligned}$$

X^2+X+1 n'a pas de racine réelle ($\Delta = -3$) et X^2+1 non plus.
P a donc deux racines réelles : 1 de multiplicité 4 et -1 de multiplicité 2.

- $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

Si $\Delta = 0$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ est une racine double de P : $P = a(X - x_0)^2$.

Exercice 13 :

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n = n\mathrm{X}^{n+1} - (n+1)\mathrm{X}^n + 1$ est divisible par $(\mathrm{X}-1)^2$.

IV. Racines d'un polynôme

2. Ordre de multiplicité d'une racine

Corollaire 21.1 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de multiplicités respectives m_1, m_2, $\cdots$, m_n, alors P est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k}$.

Corollaire 21.2 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Si P admet n racines distinctes α_1, $\cdots$, α_n de multiplicités respectives m_1, m_2, $\cdots$, m_n, alors P est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k}$.

Exercice 14 :

Montrer que le polynôme $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ n'admet que des racines simples.

Définition 16 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme non nul.

On dit que P est **scindé** lorsqu'il est constant, ou s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1.

V. Décomposition en facteurs irréductibles

1. Polynôme scindé

Définition 16 :

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme non nul.

On dit que P est scindé lorsqu'il est constant, ou s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1.

Plus précisément, P est scindé si, et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_k).$$

Exemples 15 :

- $(X-2)(X-3)$ est scindé.

Exemples 15 :

- $(X-2)(X-3)$ est scindé.
- $(X-1)^8$ est scindé.

V. Décomposition en facteurs irréductibles

1. Polynôme scindé

Exemples 15 :

- $(X-2)(X-3)$ est scindé.
- $(X-1)^8$ est scindé.
- X^2+1 ne peut s'écrire sous la forme $(X-\alpha)(X-\beta)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Sinon, α et β seraient des racines réelles de X^2+1 qui n'en a pas !

Exemples 15 :

- $(X-2)(X-3)$ est scindé.
- $(X-1)^8$ est scindé.
- X^2+1 ne peut s'écrire sous la forme $(X-\alpha)(X-\beta)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Sinon, α et β seraient des racines réelles de X^2+1 qui n'en a pas !

  Par conséquent, X^2+1 n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

ATTENTION La notion de polynôme scindé dépend du corps $\mathbb{K}$.

Exemples 15 :

- $(X-2)(X-3)$ est scindé.
- $(X-1)^8$ est scindé.
- X^2+1 ne peut s'écrire sous la forme $(X-\alpha)(X-\beta)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Sinon, α et β seraient des racines réelles de X^2+1 qui n'en a pas !

  Par conséquent, X^2+1 n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

  Il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ puisqu'on peut écrire $X^2+1=(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$.

ATTENTION La notion de polynôme scindé dépend du corps $\mathbb{K}$.

Dans $\mathbb{C}$, le problème est résolu depuis longtemps sous le nom du théorème de D'Alembert-Gauss :

Théorème 22 (de D'Alembert-Gauss) :

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine (dans $\mathbb{C}$).

Dans $\mathbb{C}$, le problème est résolu depuis longtemps sous le nom du théorème de D'Alembert-Gauss :

Théorème 22 (de D'Alembert-Gauss) :

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine (dans $\mathbb{C}$).

Corollaire 22.1 :

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme est scindé.

Dans $\mathbb{C}$, le problème est résolu depuis longtemps sous le nom du théorème de D'Alembert-Gauss :

Théorème 22 (de D'Alembert-Gauss) :

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine (dans $\mathbb{C}$).

Corollaire 22.1 :

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme est scindé.

On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Corollaire 22.2 :

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{m_k}}$$

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont les racines de P de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_n$ et λ est le coefficient dominant de P.

Corollaire 22.4 :

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{m_k}}$$

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont les racines de P de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_n$ et λ est le coefficient dominant de P.

Corollaire 22.5 :

Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Exemple 16 :

Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de P sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Il y en a n distinctes.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) | P$.

Exemple 16 :

Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de P sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Il y en a n distinctes.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) | P$.

On a donc $\displaystyle P = \left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right] Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Exemple 16 :

Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de P sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Il y en a n distinctes.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) | P$.

On a donc $P = \left[\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right] Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Or, $\deg(P) = n + \deg(Q)$ d'où $\deg(Q) = 0$ et $Q = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^{\star}$.

Exemple 16 :

Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de P sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Il y en a n distinctes.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) | P$.

On a donc $P = \displaystyle\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right] Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Or, $\deg(P) = n + \deg(Q)$ d'où $\deg(Q) = 0$ et $Q = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\star$.

D'où, $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Exemple 16 :

Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de P sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Il y en a n distinctes.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) | P$.

On a donc $P = \left[\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right] Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Or, $\deg(P) = n + \deg(Q)$ d'où $\deg(Q) = 0$ et $Q = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\star$.

D'où, $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Enfin, par identification des coefficients dominants, $\lambda = 1$.

Exemple 16 :

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de P sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Il y en a n distinctes.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) | \mathrm{P}$.

On a donc $\mathrm{P} = \left[\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right] \mathrm{Q}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Or, $\deg(\mathrm{P}) = n + \deg(\mathrm{Q})$ d'où $\deg(\mathrm{Q}) = 0$ et $\mathrm{Q} = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\star$.

D'où, $\mathrm{P} = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Enfin, par identification des coefficients dominants, $\lambda = 1$.

En conclusion, $\displaystyle \mathrm{X}^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (\mathrm{X} - \zeta)$.

Exercice 15 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P = (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}$.

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

V. Décomposition en facteurs irréductibles

3. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 23 (Racines complexes d'un polynôme réel) :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\text{Si } \alpha \text{ est une racine de P, alors } \overline{\alpha} \text{ est aussi une racine de P.}$$

Proposition 23 (Racines complexes d'un polynôme réel) :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si α est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

ATTENTION

i est une racine de $(X - i)(X + 2)$ mais $\overline{i}$ ne l'est pas.

Pas de contradiction avec la propriété ci-dessous car $(X - i)(X + 2) \notin \mathbb{R}[X]$.

Proposition 23 (Racines complexes d'un polynôme réel) :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si α est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

ATTENTION

i est une racine de $(X - i)(X + 2)$ mais $\overline{i}$ ne l'est pas.

Pas de contradiction avec la propriété ci-dessous car $(X - i)(X + 2) \notin \mathbb{R}[X]$.

On a même un peu mieux :

Proposition 24 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si α est une racine de P de multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P de multiplicité m également.

V. Décomposition en facteurs irréductibles

4. En pratique,

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En particulier, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on sait factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ connaissant son coefficient dominant λ et ses racines notées :

- Racines réelles : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En particulier, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on sait factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ connaissant son coefficient dominant λ et ses racines notées :

- Racines réelles : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- Racines complexes : $\beta_1, \overline{\beta}_1, \beta_2, \overline{\beta}_2, \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En particulier, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on sait factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ connaissant son coefficient dominant λ et ses racines notées :

- Racines réelles : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- Racines complexes : $\beta_1, \overline{\beta}_1, \beta_2, \overline{\beta}_2, \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$.

$$\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} (\mathrm{X} - \beta_\ell)^{\mu_\ell} (\mathrm{X} - \overline{\beta}_\ell)^{\mu_\ell}$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En particulier, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on sait factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ connaissant son coefficient dominant λ et ses racines notées :

- Racines réelles : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- Racines complexes : $\beta_1, \overline{\beta}_1, \beta_2, \overline{\beta}_2, \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} (\mathrm{X} - \beta_\ell)^{\mu_\ell} (\mathrm{X} - \overline{\beta}_\ell)^{\mu_\ell} \\
&= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} \left[(\mathrm{X} - \beta_\ell)(\mathrm{X} - \overline{\beta}_\ell) \right]^{\mu_\ell}
\end{aligned}
$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En particulier, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on sait factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ connaissant son coefficient dominant λ et ses racines notées :

- Racines réelles : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- Racines complexes : $\beta_1, \overline{\beta}_1, \beta_2, \overline{\beta}_2, \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} (\mathrm{X}-\beta_\ell)^{\mu_\ell} (\mathrm{X}-\overline{\beta}_\ell)^{\mu_\ell} \\
&= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} \left[(\mathrm{X}-\beta_\ell)(\mathrm{X}-\overline{\beta}_\ell)\right]^{\mu_\ell} \\
&= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} \left[\mathrm{X}^2-(\beta_\ell+\overline{\beta}_\ell)\mathrm{X}+\beta_\ell\overline{\beta}_\ell\right]^{\mu_\ell}
\end{aligned}$$

V. Décomposition en facteurs irréductibles

4. En pratique,

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En particulier, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on sait factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ connaissant son coefficient dominant λ et ses racines notées :

- Racines réelles : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- Racines complexes : $\beta_1, \overline{\beta}_1, \beta_2, \overline{\beta}_2, \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} (\mathrm{X} - \beta_\ell)^{\mu_\ell} (\mathrm{X} - \overline{\beta}_\ell)^{\mu_\ell} \\
&= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} \left[(\mathrm{X} - \beta_\ell)(\mathrm{X} - \overline{\beta}_\ell) \right]^{\mu_\ell} \\
&= \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} \left[\mathrm{X}^2 - (\beta_\ell + \overline{\beta}_\ell)\mathrm{X} + \beta_\ell \overline{\beta}_\ell \right]^{\mu_\ell}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} [\mathrm{X}^2 + u_\ell \mathrm{X} + v_\ell]^{\mu_\ell}}$$

en posant $\begin{cases} u_\ell = -(\beta_\ell + \overline{\beta}_\ell) = -2\mathrm{Re}\,(\beta_\ell) \in \mathbb{R} \\ v_\ell = \beta_\ell \overline{\beta}_\ell = |\beta_\ell|^2 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

V. Décomposition en facteurs irréductibles
4. En pratique,

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En particulier, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on sait factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ connaissant son coefficient dominant λ et ses racines notées :

- Racines réelles : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- Racines complexes : $\beta_1, \overline{\beta}_1, \beta_2, \overline{\beta}_2, \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$.

$$\boxed{\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} [\mathrm{X}^2 + u_\ell \mathrm{X} + v_\ell]^{\mu_\ell}}$$

en posant $\begin{cases} u_\ell = -(\beta_\ell + \overline{\beta}_\ell) = -2\mathrm{Re}\,(\beta_\ell) \in \mathbb{R} \\ v_\ell = \beta_\ell \overline{\beta}_\ell = |\beta_\ell|^2 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Et on a $\Delta_\ell = (u_\ell)^2 - 4v_\ell = 4\mathrm{Re}\,(\beta_\ell)^2 - 4|\beta_\ell|^2 = 4\big(\mathrm{Re}\,(\beta_\ell)^2 - |\beta_\ell|^2\big) < 0$.

En effet, $|\mathrm{Re}\,(\beta_\ell)| \leqslant |\beta_\ell|$ avec égalité uniquement si $\beta_\ell \in \mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas ici.

Corollaire 24.1 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} [X^2 + u_\ell X + v_\ell]^{\mu_\ell}} \quad (3)$$

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

où :

- λ est le coefficient dominant de P.

Corollaire 24.2 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} [\mathrm{X}^2 + u_\ell \mathrm{X} + v_\ell]^{\mu_\ell}} \qquad (3)$$

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

où :

- λ est le coefficient dominant de P.
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$.

Corollaire 24.3 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} [X^2 + u_\ell X + v_\ell]^{\mu_\ell}} \tag{3}$$

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

où :

- λ est le coefficient dominant de P.
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \cdots, (u_s, v_s)$ sont des couples de réels tels que $\forall k \in [\![1\,;s]\!]$, $u_k^2 - 4v_k < 0$, *i.e.* $X^2 + u_k X + v_k$ n'a pas de racines réelles.

Corollaire 24.4 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme P s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} [X^2 + u_\ell X + v_\ell]^{\mu_\ell}} \tag{3}$$

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

où :

- λ est le coefficient dominant de P.
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$.
- $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \cdots, (u_s, v_s)$ sont des couples de réels tels que $\forall\, k \in [\![1\,;s]\!]$, $u_k^2 - 4v_k < 0$, *i.e.* $X^2 + u_k X + v_k$ n'a pas de racines réelles.
- $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s \in \mathbb{N}$.

Corollaire 24.5 :

Les seuls polynômes normalisés irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

- Les polynômes de degré 1 de la forme $X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;

Corollaire 24.6 :

Les seuls polynômes normalisés irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

- Les polynômes de degré 1 de la forme $X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Les polynômes de degré 2 irréductibles de la forme $X^2 + uX + v$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $u^2 - 4v < 0$.

Corollaire 24.7 :

Les seuls polynômes normalisés irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

- Les polynômes de degré 1 de la forme $X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Les polynômes de degré 2 irréductibles de la forme $X^2 + uX + v$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $u^2 - 4v < 0$.

ATTENTION

Un polynôme peut très bien ne pas avoir de racines dans $\mathbb{K}$ et ne pas être irréductible :

$X^4+1 = (X^2+X\sqrt{2}+1)(X^2-X\sqrt{2}+1)$ n'a pas de racines réelles.

Exemple 17 :

Comment factoriser $P = X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Exemple 17 :

Comment factoriser $\mathrm{P} = \mathrm{X}^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

On le factorise dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, puis on regroupe les racines avec leur conjugué.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \prod_{k=0}^{5} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2ik\pi}{6}}\right) \\
&= (\mathrm{X}-1)\left(\mathrm{X} - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(\mathrm{X} - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)(\mathrm{X}+1)\left(\mathrm{X} - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\left(\mathrm{X} - e^{\frac{5i\pi}{3}}\right) \\
&= (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)\left(\mathrm{X} - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(\mathrm{X} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(\mathrm{X} - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(\mathrm{X} - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \\
&= (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)\left(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1\right)\left(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1\right).
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathrm{X}^6 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)\left(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1\right)\left(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1\right)$.

V. Décomposition en facteurs irréductibles

4. En pratique,

Exemple 17 :

Comment factoriser $P = X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?

On le factorise dans $\mathbb{C}[X]$, puis on regroupe les racines avec leur conjugué.

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=0}^{5} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{6}} \right) \\
&= (X-1)\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)(X+1)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{5i\pi}{3}}\right) \\
&= (X-1)(X+1)\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \\
&= (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right).
\end{aligned}$$

Finalement, $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)$.

Remarque : Bien sûr, on peut également reconnaître que $X^6 - 1 = \left(X^3\right)^2 - 1$ ou $X^6 - 1 = \left(X^2\right)^3 - 1$ puis factoriser, à la main, chaque facteur.

Exercice 16 :

Factoriser $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

V. Décomposition en facteurs irréductibles

5. Algorithme de Hörner

Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ une racine de f.
Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x)$.

On pose : $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$
$$\mathrm{Q}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ une racine de f.
Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x)$.

On pose :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$
$$\mathrm{Q}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Cette méthode, appelée aussi algorithme de Ruffini-Hörner, consiste à calculer les coefficients de Q de proche en proche à partir de b_{n-1} puis en descendant jusqu'à b_0.

Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ une racine de f.
Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x)$.

On pose :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$
$$\mathrm{Q}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Cette méthode, appelée aussi algorithme de Ruffini-Hörner, consiste à calculer les coefficients de Q de proche en proche à partir de b_{n-1} puis en descendant jusqu'à b_0.

$$a_n = b_{n-1} \qquad\qquad b_{n-1} = a_n$$

Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ une racine de f.
Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x)$.

On pose : $\quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$

$\mathrm{Q}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$

Cette méthode, appelée aussi algorithme de Ruffini-Hörner, consiste à calculer les coefficients de Q de proche en proche à partir de b_{n-1} puis en descendant jusqu'à b_0.

$$\begin{array}{rlcl} & a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,, & a_k = b_{k-1} - a b_k & \qquad & b_{k-1} = a_k + a b_k \end{array}$$

V. Décomposition en facteurs irréductibles

5. Algorithme de Hörner

Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ une racine de f.
Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x)$.

$$\text{On pose :} \qquad \begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad\qquad a_n \neq 0 \\ \mathrm{Q}(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Cette méthode, appelée aussi algorithme de Ruffini-Hörner, consiste à calculer les coefficients de Q de proche en proche à partir de b_{n-1} puis en descendant jusqu'à b_0.

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} & \qquad\qquad b_{n-1} &= a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!],\ a_k &= b_{k-1} - ab_k & b_{k-1} &= a_k + ab_k \\ a_0 &= -ab_0. & b_0 &= -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k & \qquad & b_{k-1} = a_k + ab_k \\ & a_0 = -ab_0. & \qquad & b_0 = -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

$$\begin{aligned}
& a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\
\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k & & b_{k-1} = a_k + ab_k \\
& a_0 = -ab_0. & & b_0 = -\frac{a_0}{a}.
\end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n					

$$\begin{aligned} & a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k & & b_{k-1} = a_k + ab_k \\ & a_0 = -ab_0. & & b_0 = -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n					
$b_{n-1} = a_n$					

$$
\begin{aligned}
& a_n = b_{n-1} & \qquad\qquad & b_{n-1} = a_n \\
\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k & & b_{k-1} = a_k + ab_k \\
& a_0 = -ab_0. & & b_0 = -\frac{a_0}{a}.
\end{aligned}
$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}				
$b_{n-1} = a_n$					

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ a_k &= b_{k-1} - ab_k \\ a_0 &= -ab_0. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{k-1} &= a_k + ab_k \\ b_0 &= -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}				
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$				

$$
\begin{array}{rll}
 & a_n = b_{n-1} & \qquad b_{n-1} = a_n \\
\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,, & a_k = b_{k-1} - ab_k & \qquad b_{k-1} = a_k + ab_k \\
 & a_0 = -ab_0. & \qquad b_0 = -\dfrac{a_0}{a}.
\end{array}
$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2		
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$				

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} & \qquad b_{n-1} &= a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ a_k &= b_{k-1} - ab_k & \qquad b_{k-1} &= a_k + ab_k \\ a_0 &= -ab_0. & \qquad b_0 &= -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2		
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$		$b_1 = a_2 + ab_2$		

$$
\begin{aligned}
& a_n = b_{n-1} \\
\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k \\
& a_0 = -ab_0.
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{k-1} &= a_k + ab_k \\
b_0 &= -\frac{a_0}{a}.
\end{aligned}
$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$		$b_1 = a_2 + ab_2$		

$$\begin{aligned} & a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k & & b_{k-1} = a_k + ab_k \\ & a_0 = -ab_0. & & b_0 = -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$		$b_1 = a_2 + ab_2$	$b_0 = a_1 + ab_1$	

$$\begin{aligned} & a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k & \qquad & b_{k-1} = a_k + ab_k \\ & a_0 = -ab_0. & \qquad & b_0 = -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$		$b_1 = a_2 + ab_2$	$b_0 = a_1 + ab_1$	

$$\begin{aligned} & a_n = b_{n-1} \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k \\ & a_0 = -ab_0. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{k-1} &= a_k + ab_k \\ b_0 &= -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$		$b_1 = a_2 + ab_2$	$b_0 = a_1 + ab_1$	$b_0 = -\dfrac{a_0}{a}$

$$\begin{aligned} & a_n = b_{n-1} & \qquad & b_{n-1} = a_n \\ \forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ & a_k = b_{k-1} - ab_k & \qquad & b_{k-1} = a_k + ab_k \\ & a_0 = -ab_0. & \qquad & b_0 = -\frac{a_0}{a}. \end{aligned}$$

On calcule, en général, ces coefficients à partir d'un tableau que l'on remplit de gauche à droite :

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$		$b_1 = a_2 + ab_2$	$b_0 = a_1 + ab_1$	$b_0 = -\dfrac{a_0}{a}$

La redondance des deux dernières colonnes permettant de vérifier ses calculs...

Exemple 18 :

Soit la fonction polynômiale définie par

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \qquad \text{avec} \qquad a = 1.$$

L'algorithme d'Hörner s'écrit :

1	5	5	-5	-6

Exemple 18 :

Soit la fonction polynômiale définie par

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \quad \text{avec} \quad a = 1.$$

L'algorithme d'Hörner s'écrit :

	1	5	5	-5	-6
(Calcul de b_3)	1				

Exemple 18 :

Soit la fonction polynômiale définie par

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \quad \text{avec} \quad a = 1.$$

L'algorithme d'Hörner s'écrit :

	1	5	5	-5	-6
(Calcul de b_3)	1				
(Calcul de b_2)	1	$6 = 5 + 1 \times 1$			

Exemple 18 :

Soit la fonction polynômiale définie par

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \quad \text{avec} \quad a = 1.$$

L'algorithme d'Hörner s'écrit :

	1	5	5	-5	-6
(Calcul de b_3)	1				
(Calcul de b_2)	1	$6 = 5 + 1 \times 1$			
(Calcul de b_1)	1	6	$11 = 5 + 1 \times 6$		

Exemple 18 :

Soit la fonction polynômiale définie par

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \quad \text{avec} \quad a = 1.$$

L'algorithme d'Hörner s'écrit :

	1	5	5	-5	-6
(Calcul de b_3)	1				
(Calcul de b_2)	1	$6 = 5 + 1 \times 1$			
(Calcul de b_1)	1	6	$11 = 5 + 1 \times 6$		
(Calcul de b_0)	1	6	11	6	$-\dfrac{-6}{1} = 6$

Exemple 18 :

Soit la fonction polynômiale définie par

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \quad \text{avec} \quad a = 1.$$

L'algorithme d'Hörner s'écrit :

	1	5	5	-5	-6
(Calcul de b_3)	1				
(Calcul de b_2)	1	$6 = 5 + 1 \times 1$			
(Calcul de b_1)	1	6	$11 = 5 + 1 \times 6$		
(Calcul de b_0)	1	6	11	6	$-\dfrac{-6}{1} = 6$

On retrouve : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$.

Exemple 18 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3+6x^2+11x+6).$$

Et on continue avec $a=-1$:

	1	6	11	6
(Avec $a=-1$)	1	5	6	6

Exemple 18 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6).$$

Et on continue avec $a = -1$:

	1	6	11	6
(Avec $a = -1$)	1	5	6	6

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 6).$$

Exemple 18 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6).$$

Et on continue avec $a = -1$:

	1	6	11	6
(Avec $a = -1$)	1	5	6	6
(Avec $a = -2$)	1	3	3	

Exemple 18 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; f(x) = (x-1)(x^3+6x^2+11x+6).$$

Et on continue avec $a = -1$:

	1	6	11	6
(Avec $a = -1$)	1	5	6	6
(Avec $a = -2$)	1	3	3	

On retrouve encore, $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+3).$

Exercice 17 :

Factoriser $P = 4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$ à l'aide de l'algorithme de Hörner sachant que 5 est une des racines.

VI. Somme et produit des racines

VI. Somme et produit des racines

Il est très difficile d'exprimer les racines en fonction des coefficients d'un polynôme. C'est même impossible dans le cas général à partir du degré 5.

VI. Somme et produit des racines

Il est très difficile d'exprimer les racines en fonction des coefficients d'un polynôme. C'est même impossible dans le cas général à partir du degré 5.

En revanche on peut facilement exprimer les coefficients en fonction des racines d'un polynôme scindé :

VI. Somme et produit des racines
1. Degré 2

Dans le cas du degré 2, en identifiant $P = aX^2 + bX + c$ et $P = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$, on obtient :

Proposition 25 :

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$ avec $a \in \mathbb{K}^*$.

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont racines de P si, et seulement si } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Dans le cas du degré 2, en identifiant $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ et $\mathrm{P} = a(\mathrm{X} - \alpha_1)(\mathrm{X} - \alpha_2)$, on obtient :

Proposition 25 :

Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $a \in \mathbb{K}^*$.

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont racines de P si, et seulement si } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha_1 \alpha_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Exemple 19 :

$\forall\, \alpha \in \mathbb{C}, \quad (\mathrm{X} - \alpha)(\mathrm{X} - \overline{\alpha}) = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{Re}\,(\alpha) + |\alpha|^2.$

En particulier : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)\left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta}\right) = \mathrm{X}^2 - 2\cos(\theta)\mathrm{X} + 1.$

VI. Somme et produit des racines

2. Cas général

Considérons $\mathrm{P} = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$.

Posons $\mathrm{P} = a_n(\mathrm{X} - \alpha_1)(\mathrm{X} - \alpha_2)\cdots(\mathrm{X} - \alpha_n)$ (les α_i éventuellement identiques en cas de racines multiples).

VI. Somme et produit des racines

2. Cas général

Considérons $\mathrm{P} = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$.

Posons $\mathrm{P} = a_n(\mathrm{X}-\alpha_1)(\mathrm{X}-\alpha_2)\cdots(\mathrm{X}-\alpha_n)$ (les α_i éventuellement identiques en cas de racines multiples).

En développant, on a

$$\mathrm{P} = a_n\Big(\mathrm{X}^n - (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\Big)$$

VI. Somme et produit des racines

2. Cas général

Considérons $\mathrm{P} = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$.
Posons $\mathrm{P} = a_n(\mathrm{X}-\alpha_1)(\mathrm{X}-\alpha_2)\cdots(\mathrm{X}-\alpha_n)$ (les α_i éventuellement identiques en cas de racines multiples).

En développant, on a
$\mathrm{P} = a_n\Big(\mathrm{X}^n - (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\Big)$

En identifiant, on a (entre autres) $\begin{cases} a_{n-1} = -a_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) \\ a_0 = a_n(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \end{cases}$.

On peut donc trouver facilement la somme et le produit des racines ainsi que d'autres sommes remarquables :

Proposition 26 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme scindé de degré n *i.e.* $a_n \neq 0$.

Si α_1, α_2, ..., α_n sont les racines de P alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{cases}$$

VI. Somme et produit des racines
2. Cas général

On peut donc trouver facilement la somme et le produit des racines ainsi que d'autres sommes remarquables :

Proposition 26 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme scindé de degré n *i.e.* $a_n \neq 0$.

Si α_1, α_2, ..., α_n sont les racines de P alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \end{cases}$$

VI. Somme et produit des racines

2. Cas général

On peut donc trouver facilement la somme et le produit des racines ainsi que d'autres sommes remarquables :

Proposition 26 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme scindé de degré n *i.e.* $a_n \neq 0$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont les racines de P alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots & \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_p} & = (-1)^p \dfrac{a_{n-p}}{a_n} \end{cases}$$

VI. Somme et produit des racines
2. Cas général

On peut donc trouver facilement la somme et le produit des racines ainsi que d'autres sommes remarquables :

Proposition 26 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme scindé de degré n *i.e.* $a_n \neq 0$.

Si α_1, α_2, ..., α_n sont les racines de P alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots & \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_p} & = (-1)^p \dfrac{a_{n-p}}{a_n} \\ \ldots & \\ \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n & = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Exemple 20 :

Soit $n \geqslant 2$. On a vu que $X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta)$.

Donc $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = 0$: la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle.

Exercice 18 :

Soient a, b, c les trois racines complexes de $P = X^3 - 3X - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,

Exercice 18 :

Soient a, b, c les trois racines complexes de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,
2. $ab + ac + bc$,

Exercice 18 :

Soient a, b, c les trois racines complexes de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,
2. $ab + ac + bc$,
3. abc,

Exercice 18 :

Soient a, b, c les trois racines complexes de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,
2. $ab + ac + bc$,
3. abc,
4. $a^2 + b^2 + c^2$,

Exercice 18 :

Soient a, b, c les trois racines complexes de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,
2. $ab + ac + bc$,
3. abc,
4. $a^2 + b^2 + c^2$,
5. $a^3 + b^3 + c^3$,

Exercice 18 :

Soient a, b, c les trois racines complexes de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,
2. $ab + ac + bc$,
3. abc,
4. $a^2 + b^2 + c^2$,
5. $a^3 + b^3 + c^3$,
6. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$,

Exercice 18 :

Soient a, b, c les trois racines complexes de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 1$.

Calculer :

1. $a + b + c$,
2. $ab + ac + bc$,
3. abc,
4. $a^2 + b^2 + c^2$,
5. $a^3 + b^3 + c^3$,
6. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$,
7. $a^7 + b^7 + c^7$.