Suites et polynômes I

Question de cours : *Propriété des suites adjacentes.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Correction : Supposons que $u+v$ converge. Alors, $(u+v)-u$ converge : absurde !

Exercice 2 : Montrer que $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$ divise $(\mathrm{X}-1)^{n+2}+\mathrm{X}^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Correction : $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1=(\mathrm{X}+j)(\mathrm{X}+j^2)$.

Or $\mathrm{P}(-j)=(-j-1)^{n+2}+(-j)^{2n+1}=(j^2)^{n+2}+(-j)^{2n+1}=j^{2n+4}-(j)^{2n+1}=0$.

Donc $-j$ et par suite $-j^2$ sont des racines de P. CQFD.

Exercice 3 : Soit $u_0>0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Qu'en déduire pour l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x\mapsto\dfrac{1+x}{1+2x}$. f est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

En posant $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$, on a $f(\mathrm{I})=\left]\dfrac{1}{2},1\right[\subset\mathrm{I}$.

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et même $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$.

La fonction f étant décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

Comme elles sont bornées, elles convergent vers un point fixe de $f\circ f$ continue.

$f\circ f(x)=x \iff \dfrac{2+3x}{3+4x}=x \iff 4x^2=2$. Le seul point fixe de $f\circ f$ dans I est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, condition suffisante de monotonie.*

Exercice 1 : $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction : On prend $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Or le membre de droite tend vers 0. On conclut par encadrement.

Exercice 2 : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto xe^{-x}$. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives.

$\forall x \geqslant 0, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante. Étant positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Formule de Taylor pour les polynômes.*

Exercice 1 : Montrer que $u_n = n^3$ diverge vers l'infini.
Correction : Soit $A \in \mathbb{R}$.

- Si $A \geqslant 1$ alors $A^3 \geqslant A$. On peut donc poser $n_0 = A$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies n^3 \geqslant n_0^3 \geqslant A^3 \geqslant A$.
- Si $A \leqslant 1$, il suffit de poser $n_0 = 1$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies n^3 \geqslant 1 \geqslant A$.

Exercice 2 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2+\sqrt{3})$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Correction : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$. $f(\mathbb{R}_+^*) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$. En posant $I = [1, +\infty[$, f étant croissante sur I, on en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone.

D'autre part, $\forall x \in I, f(x) \leqslant x$. D'où la décroissance de $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Cette suite est par conséquent convergente. Sa limite est un point fixe de f (continue) sur I. 1 est le seul. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Moyenne de Cesàro.*

Exercice 1 :

1. Trouver une suite non bornée qui ne tende ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.
2. Trouver une suite positive qui converge vers 0, mais non décroissante, même pour n très grand.
3. Trouver une suite divergente telle que $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, (u_{np})_n$ converge.

Correction :

1. $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée mais ne diverge ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.
2. $\left(\dfrac{1}{n+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, mais non décroissante, même pour n très grand.
3. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est premier} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

   Pour $n \geqslant 2$, $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, u_{np} = 0$ donc $(u_{np})_n$ converge. Pourtant, l'ensemble des nombres premiers étant infini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet aussi une suite extraite convergeant vers 1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien divergente.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = (\cos\theta + \mathrm{X}\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Correction : $\mathrm{P} = (\cos\theta + \mathrm{X}\sin\theta)^n = (\mathrm{X}^2+1)\mathrm{Q} + (a\mathrm{X}+b)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(i) = ai+b \\ \mathrm{P}(-i) = -ai+b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} e^{ni\theta} = ai+b \\ e^{-ni\theta} = -ai+b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = \sin\theta \\ b = \cos\theta \end{cases}$$

$\mathrm{R} = \mathrm{X}\sin\theta + \cos\theta$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives.

$\forall x \geqslant 0, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante. Étant positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Caractérisation de la convergence des suites complexes par la partie réelle et la partie imaginaire.*

Exercice 1 : Montrer que si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Correction : $0 \leqslant ||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$ donc $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$ par encadrement.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ $(a \neq b)$.

Donner le reste dans la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Correction : $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{Q} + (u\mathrm{X}+v)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(a) = ua + v \\ \mathrm{P}(b) = ub + v \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u = \dfrac{\mathrm{P}(b)-\mathrm{P}(a)}{b-a} \\ v = \dfrac{b\mathrm{P}(a)-a\mathrm{P}(b)}{b-a} \end{cases}$$

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}(b)-\mathrm{P}(a)}{b-a}\mathrm{X} + \frac{b\mathrm{P}(a)-a\mathrm{P}(b)}{b-a}.$$

Exercice 3 : Soit $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto 1 - \cos x$. f est croissante sur $\mathrm{I} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f(\mathrm{I}) = [0, 1] \subset \mathrm{I}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans I. f étant croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. $u_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\pi}{4}$.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Minorée par 0, elle converge. Sa limite ℓ est un point fixe de f continue sur I. C'est-à-dire $1 - \cos \ell = \ell$. Seule possibilité 0. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Autre possibilité : étude de $\phi : x \mapsto 1 - \cos x - x$. $\phi'(x) = \sin x - 1 < 0$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ donc ϕ est strictement décroissante sur cet intervalle.
  Comme $\phi(0) = 0$, on a $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right], \phi(x) < 0$ et donc $f(x) < x$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante, et le seul point fixe de f est 0.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Division euclidienne des polynômes.*

Exercice 1 : Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.
Correction : Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Dans l'intervalle $\mathrm{I} = \left]\ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2}\right[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $\mathrm{I} \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.

La convergence de (u_n) s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad (n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon).$$

Fixons $\epsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons un N correspondant. Et pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$.
Or, u_n est un entier, donc

$$n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n \in \mathrm{I} \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $\mathrm{I} \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $\mathrm{I} \cap \mathbb{N} = \{a\}$.
L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite (u_n) est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{X}^3 + i\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}$ par $\mathrm{X} - i + 1$.
Correction : $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + (-1 + 2i)\mathrm{X} - 3i$
$\mathrm{R} = 3 + 3i$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{16 + u_n^2}{2}}$.

Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{16+x^2}{2}}$. $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives à partir du rang 1.

f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone.

Pour $x > 0$ on a $f(x) < x \iff \sqrt{\dfrac{16+x^2}{2}} < x \iff 4 < x$. Plusieurs cas :

- Si $u_0 \in [4, +\infty[$, $u_1 \leqslant u_0$: la suite est décroissante.

  Elle est également minorée par 4 : en posant $\mathrm{I} = [4, +\infty[$ on a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{I}$.

  Elle converge donc.
- Si $u_0 \in [-4, 4]$, $u_1 \geqslant u_0$: la suite est croissante et majorée par 4 (on pose $\mathrm{I} = [-4, 4]$). Elle converge.
- Si $u_0 < -4$. Alors, $u_1 > 4$ et on reprend le premier point : la suite est décroissante (à partir du rang 1).

Dans tous les cas, la suite converge. Comme f est continue, elle converge vers un point fixe de f. 4 est le seul candidat.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Propriété des suites adjacentes.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Correction : $\forall k \in [\![1, n^2]\!], \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ donc $\frac{n}{\sqrt{2}} \leqslant u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 1$.

Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Exercice 3 : On définit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$ admet un, et un seul point fixe α.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite de référence.
3. En déduire l'expression explicite de v_n, puis de u_n.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, condition suffisante de monotonie.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Correction : $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}}$ donc $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ par encadrement.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} + 2\mathrm{X}^n + 1$ par $\mathrm{Q}_1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.

Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Qu'en déduire pour l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+2x}$. f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

En posant $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$, on a $f(\mathrm{I}) = \left]\frac{1}{2}, 1\right[\subset \mathrm{I}$.

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et même $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

La fonction f étant décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

Comme elles sont bornées, elles convergent vers un point fixe de $f \circ f$ continue.

$f \circ f(x) = x \iff \frac{2+3x}{3+4x} = x \iff 4x^2 = 2$. Le seul point fixe de $f \circ f$ dans I est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Et par suite $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Formule de Taylor pour les polynômes.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

Correction : $\forall\, k \in [\![1, 2n+1]\!]$, $\frac{n}{n^2+2n+1} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2}$ donc $\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n+1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ par encadrement.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} + 2\mathrm{X}^n + 1$ par $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{X}^2 + 1$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Moyenne de Cesàro.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = n - \sqrt{n^2 + (-1)^n}$.

Correction : $u_n = n - \sqrt{n^2+(-1)^n} = \dfrac{-(-1)^n}{n+\sqrt{n^2+(-1)^n}}$ d'où $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^2}}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(\mathrm{X}-3)^{2n} + (\mathrm{X}-2)^n - 2$ par $(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-2)$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \geqslant \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - \dfrac{2}{9}}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Caractérisation de la convergence des suites complexes par la partie réelle et la partie imaginaire.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n}$ et $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sin n}$.

Correction :

- $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n^2}{n} = 0$;
- De même, $\dfrac{1}{v_n}$ tend vers 0. Par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $(X-2)^2$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}^\star$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{u_n}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Division euclidienne des polynômes.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n}{n}$.

Correction : $u_n = \dfrac{\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n}{n} = \dfrac{1}{n}\mathrm{Im}\left[\sum_{k=1}^{n}(e^i)^k\right] = \dfrac{1}{n}\mathrm{Im}\left[e^i\dfrac{(e^i)^n - 1}{e^i - 1}\right] = \dfrac{\sin\frac{n}{2}\sin\frac{n+1}{2}}{n\sin\frac{1}{2}}$.

On a donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sin\frac{1}{2}}$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (La réciproque de Cesàro est fausse).

Exercice 2 : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Sachant que le reste dans la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - a$ (respectivement $\mathrm{X} - b$) est 1 (respectivement -1), déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.

Exercice 3 : Montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2}\sin u_n \end{cases}$ converge quelle que soit la valeur de u_0.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Propriété des suites adjacentes.*

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k-1)}}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et encadrer sa limite.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

Correction : $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \left(X^2 - 2X\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)u_n$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \frac{1}{n+1}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto (1-x)x$ et $I =]0, 1[$. On a $f(I) = \left]0, \frac{1}{4}\right] \subset I$.

On a $\forall x \in I, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante.

positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

- $u_1 \leqslant \frac{1}{4}$ donc on a bien $u_n < \frac{1}{n+1}$ au rang 1.
- Supposons que $u_n < \frac{1}{n+1}$.

  Alors f étant strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, on a $f(u_n) < f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

  C'est à dire $u_{n+1} < \frac{n}{(n+1)^2}$.

  Mais $\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$ puisque $n(n+2) < (n+1)^2$. D'où $u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$.

et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \frac{1}{n+1}$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, condition suffisante de monotonie.*

Exercice 1 : Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^k}$.

En introduisant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Correction : Si $x \neq 0$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{-x})^k = \frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$.

D'où, en dérivant : $\forall x \neq 0, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -ke^{-kx} = \frac{(1-n)e^{-(n+1)x} + ne^{-nx} - e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$.

et donc en $x = 1$, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^k} = \frac{(n-1)e^{-(n+1)} - ne^{-n} + e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$ ou encore $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{e^k} = \frac{e}{(e-1)^2}}$.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + 1$.

Correction : $X^4 + 1 = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$.

Exercice 3 : Soit $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}$ où u_n comporte n radicaux emboîtés.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Correction : On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

On pose $f : x \mapsto \sqrt{2x}$ et $I = [0, 2]$. On a $f(I) = I$. La suite est correctement définie et à valeurs dans I.

f est croissante sur I donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Or $u_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = u_0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Elle est donc convergente. Sa limite ℓ est un point fixe de f (continue).

$f(\ell) = \ell \iff \sqrt{2\ell} = \ell \iff \sqrt{\ell}(\sqrt{2} - \sqrt{\ell}) = 0 \iff \ell = 0$ ou $\ell = 2$.

Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et comme $u_1 = \sqrt{2}$, la suite ne peut converger vers 0. D'où finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

$$\boxed{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}} = 2.}$$

Suites et polynômes I

Question de cours : *Formule de Taylor pour les polynômes.*

Exercice 1 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Correction : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Par conséquent, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^7 - 1$.

Correction : $X^7 - 1 = (X-1)\left(X^2 - 2X\cos\dfrac{2\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\dfrac{4\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\dfrac{6\pi}{7} + 1\right)$.

Exercice 3 : Montrer que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}$.

Correction :

- Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

  f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Ici, croissante. Comme $f(x) = x$ admet pour seule solution $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sur $\mathbb{R}$, c'est le seul point fixe de f. $[0, \phi]$ est stable par f.

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, majorée. Elle converge donc vers le point fixe de f (continue). D'où $\lim u = \phi$.

- Soit $g : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = f(v_n)$.

  g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g([1,2]) \subset [1,2]$. Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est bornée.

  Or les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones, et bornées. Elles convergent donc toutes deux vers un point fixe de $g \circ g$ (continue) sur $[1,2]$.

Or $g \circ g(x) = x$ admet pour seule solution positive $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sur $[1, 2]$.

Par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle-même vers ϕ. CQFD.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Moyenne de Cesàro.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Correction : Supposons que $u+v$ converge. Alors, $(u+v)-u$ converge : absurde !

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6+3X^4+3X^2+1$.
Correction : $X^6+3X^4+3X^2+1=(X^2+1)^3$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes ?

- Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Correction :

1. Vrai.
2. Faux. $(-1)^n$.
3. Vrai. Fixons $\epsilon>0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel que
$$2p\geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p}-\ell|<\epsilon.$$
Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que
$$2p+1\geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1}-\ell|<\epsilon.$$
Soit $N=\max(N_1,N_2)$, alors
$$n\geqslant N \Rightarrow |u_n-\ell|<\epsilon.$$
Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Caractérisation de la convergence des suites complexes par la partie réelle et la partie imaginaire.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Correction : Supposons que $u+v$ converge. Alors, $(u+v)-u$ converge : absurde !

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6+2X^4+2X^2+1$.
Correction : $X^6+2X^4+2X^2+1=(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

Exercice 3 : Soient $u_0>0$ et $v_0>0$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n) \qquad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}}=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}$$

sont adjacentes.

Que peut-on en conclure. Déterminer $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Suites et polynômes I

Question de cours : *Division euclidienne des polynômes.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Correction : *Supposons que $u+v$ converge. Alors, $(u+v)-u$ converge : absurde !*

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme X^8+X^4+1.
Correction : $X^8+X^4+1=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-X\sqrt{3}+1)(X^2+X\sqrt{3}+1)$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0. On définit $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k$.

1. Montrer que (v_{2k}) et (v_{2k+1}) sont adjacentes.
2. Conclure.