Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes 1

Question de cours : *Propriété des suites adjacentes.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 2 : Montrer que $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$ divise $(\mathrm{X}-1)^{n+2}+\mathrm{X}^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Exercice 3 : Soit $u_0>0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.
Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
Qu'en déduire pour l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes 1

Question de cours : *Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, condition suffisante de monotonie.*

Exercice 1 : $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 2 : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Formule de Taylor pour les polynômes.*

Exercice 1 : Montrer que $u_n = n^3$ diverge vers l'infini.

Exercice 2 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2+\sqrt{3})$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Moyenne de Cesàro.*

Exercice 1 :

1. Trouver une suite non bornée qui ne tende ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.
2. Trouver une suite positive qui converge vers 0, mais non décroissante, même pour n très grand.
3. Trouver une suite divergente telle que $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, (u_{np})_n$ converge.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = (\cos\theta + \mathrm{X}\sin\theta)^n$ par $\mathrm{X}^2 + 1$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Caractérisation de la convergence des suites complexes par la partie réelle et la partie imaginaire.*

Exercice 1 : Montrer que si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ $(a \neq b)$.
Donner le reste dans la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Exercice 3 : Soit $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Division euclidienne des polynômes.*

Exercice 1 : Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 : Effectuer la division euclidienne de $X^3 + iX^2 + X$ par $X - i + 1$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{16 + u_n^2}{2}}$.
Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Propriété des suites adjacentes.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 1$.
Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Exercice 3 : On définit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$ admet un, et un seul point fixe α.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite de référence.
3. En déduire l'expression explicite de v_n, puis de u_n.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, condition suffisante de monotonie.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} + 2\mathrm{X}^n + 1$ par $\mathrm{Q}_1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Qu'en déduire pour l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes 1

Question de cours : *Formule de Taylor pour les polynômes.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} + 2\mathrm{X}^n + 1$ par $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{X}^2 + 1$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{u_n}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Moyenne de Cesàro.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = n - \sqrt{n^2 + (-1)^n}$.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(\mathrm{X}-3)^{2n} + (\mathrm{X}-2)^n - 2$ par $(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-2)$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \geqslant \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - \dfrac{2}{9}}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Caractérisation de la convergence des suites complexes par la partie réelle et la partie imaginaire.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n}$ et $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sin n}$.

Exercice 2 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(\mathrm{X}-3)^{2n} + (\mathrm{X}-2)^n - 2$ par $(\mathrm{X}-2)^2$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}^\star$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{u_n}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Division euclidienne des polynômes.*

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n}{n}$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Sachant que le reste dans la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - a$ (respectivement $\mathrm{X} - b$) est 1 (respectivement -1), déterminer le reste dans le division euclidienne de P par $(\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.

Exercice 3 : Montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2} \sin u_n \end{cases}$ converge quelle que soit la valeur de u_0.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Propriété des suites adjacentes.*

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k-1)}}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et encadrer sa limite.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^4$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = (1-u_n)u_n$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, condition suffisante de monotonie.*

Exercice 1 : Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^k}$.

En introduisant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + 1$.

Exercice 3 : Soit $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}$ où u_n comporte n radicaux emboîtés.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Formule de Taylor pour les polynômes.*

Exercice 1 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^7 - 1$.

Exercice 3 : Montrer que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Moyenne de Cesàro.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6+3X^4+3X^2+1$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes ?

- Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Caractérisation de la convergence des suites complexes par la partie réelle et la partie imaginaire.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$.

Exercice 3 : Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \qquad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$$

sont adjacentes.

Que peut-on en conclure. Déterminer $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites et polynômes I

Question de cours : *Division euclidienne des polynômes.*

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 2 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0. On définit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que (v_{2k}) et (v_{2k+1}) sont adjacentes.
2. Conclure.