Fichiers Suites-Extraites a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes ?

- Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Correction :

1. Vrai.
2. Faux. $(-1)^n$.
3. Vrai. Fixons $\epsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel que
$$2p \geqslant \mathrm{N}_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \epsilon.$$
Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que
$$2p+1 \geqslant \mathrm{N}_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \epsilon.$$
Soit $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$, alors
$$n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.$$
Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Exercice 2 : Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \qquad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$$

sont adjacentes.

Que peut-on en conclure. Déterminer $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0. On définit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que (v_{2k}) et (v_{2k+1}) sont adjacentes.
2. Conclure.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 2 : Montrer que (u_n) converge si, et seulement si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

Correction : Les suites (u_{6n}) et (u_{6n+3}) extraites respectivement de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la limite de (u_{3n}) donc ont la même limite.
Le reste est facile.

Exercice 3 : Soit $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) u_n$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Correction :

- $u_{n+1} = u_n \left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) \geqslant u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)u_{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n(n+2)\left[(n+1)^2+1\right]}{(n+1)^4} \\ &= \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{n^4+4n^3+6n^2+4n+1} < 1.\end{aligned}$$

  ou $$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)u_{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{(n+1)-1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1-\frac{1}{(n+1)^4} < 1.\end{aligned}$$

  Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \frac{u_n}{n}$. On en déduit d'une part que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. Elle converge donc, et par suite $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

NB : D'après Maple, $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}$.

Exercice 4 : $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. CNS sur $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2$ pour que (u_n) et (v_n) soient adjacentes, sachant que :

$u_{n+1} = \sqrt{a+bu_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{a+bv_n}$.

Correction : On pose $f : x \mapsto \sqrt{a+bx}$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$. On a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Les suites sont correctement définies et à valeurs dans I.

f est croissante sur I donc les suites sont monotones.

Sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{a+bx} \leqslant x \iff a+bx \leqslant x^2$.

$\Delta = b^2+4a > 0$ donc l'équation $a+bx = x^2$ admet deux solutions $\ell = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ et $\ell' = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2} < 0$.

- Si l'on pose $\mathrm{I} = [0, \ell]$, on a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Si $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite *su* est croissante, et converge vers ℓ.
- Si l'on pose $\mathrm{J} = [\ell, +\infty[$, on a $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$. Si $u_0 \in \mathrm{J}$, la suite *su* est décroissante, et converge vers ℓ.

On en conclut donc que (u_n) et (v_n) sont adjacentes, si, et seulement si, u_0 et v_0 sont pris de part et d'autre de $\ell = \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

Exercice 5 : Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé, avec $p \geqslant 2$.

On définit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Correction :

- $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^p} \geqslant u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^p} + \dfrac{1}{(n+1)^{p-1}} - \dfrac{1}{n^{p-1}} = \dfrac{n^{p-1} + n^{p-1}(n+1) - (n+1)^p}{n^{p-1}(n+1)^p}$ car $p \geqslant 2$.
$$= \frac{(2-p)n^{p-1} - \binom{p}{2}n^{p-2} - \cdots}{n^{p-1}(n+1)^p} < 0$$
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \dfrac{1}{n^{p-1}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\dfrac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Correction :

1. $u_{n+q} = \cos\left(\dfrac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{q}\right) = u_n$.
2. $u_{nq} = \cos\left(\dfrac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0$

   $u_{nq+1} = \cos\left(\dfrac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{q}\right) = u_1$.

   Pour $q \geqslant 2$, $\cos\dfrac{2\pi}{q} \neq 1$ donc (u_n) ne peut converger.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite monotone.

Montrer que si (u_n) admet une suite extraite convergente, alors (u_n) converge.

Correction : Considérons une suite monotone $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant une suite extraite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Écrivons $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\phi(n)}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Soit ℓ la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |v_n - \ell| < \epsilon$.

Soit $\mathrm{N}_0 = \phi(n_0)$.

Supposons que $n \in \mathbb{N}$ et que $n \geqslant \mathrm{N}_0$

Alors, on peut encadrer le terme u_n par deux termes de la suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple : $\mathrm{N}_0 \leqslant n \leqslant \phi(n)$ soit $\phi(n_0) \leqslant n \leqslant \phi(n)$ (car on a toujours $\phi(n) \geqslant n$: lemme).

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a donc $u_{\phi(n_0)} \leqslant u_n \leqslant u_{\phi(n)}$ ou encore $v_{n_0} \leqslant u_n \leqslant v_n$.

  Or n et n_0 sont supérieurs à n_0 donc $\ell - \epsilon < v_{n_0} \leqslant u_n \leqslant v_n < \ell + \epsilon$.
- Idem, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $u_{\phi(n)} \leqslant u_n \leqslant u_{\phi(n_0)}$ et donc $\ell - \epsilon < v_n \leqslant u_n \leqslant v_{n_0} < \ell + \epsilon$.

Dans tous les cas, $|u_n - \ell| < \epsilon$.

On a démontré que $\forall\, \epsilon > 0, \exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant \mathrm{N}_0 \implies |u_n - \ell| < \epsilon$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Correction : $v_{2n} = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} + \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} u_{2k} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{2k}\right]$.

D'après Cesàro, $v_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{a+b}{2}$.

$v_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} u_k = \dfrac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} + \dfrac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} u_{2k} = \dfrac{n+1}{2n+1}\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} + \dfrac{n}{2n+1}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{2k}$.

D'après Cesàro, $v_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{a+b}{2}$.

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{a+b}{2}}$.