Fichiers Suites-Recurrentes-Lineaires a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Déterminer l'expression explicite de u_n.

Correction : Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$ ayant pour racine double 2.

$u_n = (\lambda n + \mu)2^n$.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ 2(\lambda+\mu) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)2^n}$$

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.
Déterminer l'expression explicite de u_n.

Correction : Équation caractéristique : $r^2+r+1 = 0$ ayant pour racines j et j^2. Module 1 et argument $\dfrac{2\pi}{3}$

$u_n = 1^n\left(\lambda\cos\dfrac{2n\pi}{3} + \mu\sin\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda\cos\frac{2\pi}{3} + \mu\sin\frac{2\pi}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda\cos\frac{2\pi}{3} + \mu\sin\frac{2\pi}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}.}$$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble des complexes λ tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \lambda$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$ vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 1$.

Correction : L'équation caractéristique est $\mathrm{E}_c : r^2 = r - \dfrac{1}{4}$. Elle admet une solution double : $\dfrac{1}{2}$.

Il existe donc deux constantes A, B telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\mathrm{A}n + \mathrm{B})\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{B} = 0 \\ \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} = 2\lambda \end{cases}$$

. Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{2\lambda n}{2^n}$.

- Si $\lambda = 0$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ donc la suite convient.
- Si $\lambda \neq 0$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} \leqslant 1$. La suite $(|u_n|)$ est donc décroissante à partir du rang 1 (et nulle en 0). Elle est donc majorée par son premier terme $|u_1| = |\lambda|$.

Bilan

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 1 \iff |\lambda| \leqslant 1.}$$

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$, $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + n + 3$.
Déterminer l'expression explicite de u_n.

Correction :

- Recherche de solution particulière (α_n) sous la forme : $\alpha_n = an + b$.

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n + n + 3 \iff \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{7}{4} \end{cases}.$$

- La suite définie par $v_n = u_n - \alpha_n$ vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.

Équation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0$ ayant pour racines -1 et 2.

$v_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$.

Donc $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n - \dfrac{n}{2} - \dfrac{7}{4}$

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ u_1 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4} \\ -\lambda + 2\mu - \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{5}{3}2^n - \frac{n}{2} - \frac{7}{4}.}$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.