Fichiers Polynomes-Coef a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : a, b, c sont les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^3 - X^2 + 4X - 1$.
Calculer $a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b$.

Correction : On a $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$, et $\sigma_3 = 1$.
$(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc) = [a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b] + (a^2bc+ab^2c+abc^2)$.
Donc $[a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b] = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 = -29$.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Résoudre $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+xz+yz=-2 \\ xyz=-1 \end{cases}$.

Correction : x, y, z sont les racines de $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2+X-1)$.
$\{x, y, z\} = \left\{1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : a, b, c sont les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^3 + 3X - 1$. Calculer :

- $a^2+b^2+c^2$;
- $a^3+b^3+c^3$;
- $\dfrac{1}{(1-a^3)^2} + \dfrac{1}{(1-b^3)^2} + \dfrac{1}{(1-c^3)^2}$;
- $a^7+b^7+c^7$;

Correction : On a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 3$, et $\sigma_3 = 1$.

- $a^2+b^2+c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -6$.
- $(a+b+c)^3 = [a^3+b^3+c^3] + 3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) + 6abc = (a^3+b^3+c^3) + 3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 6\sigma_3$.
  Par conséquent, $[a^3+b^3+c^3] = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3$.
- $$\begin{aligned} \frac{1}{(1-a^3)^2} + \frac{1}{(1-b^3)^2} + \frac{1}{(1-c^3)^2} &= \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(3b)^2} + \frac{1}{(3c)^2} \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{9a^2b^2c^2} \\ &= \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1}{9\sigma_3^2} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et P le polynôme défini par la relation $(X+1)^{2n} - 1 = XP$.

1. Déterminer l'expression développée de P.
2. Déterminer l'expression factorisée de P.

3 En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ puis de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

Exercice 3 : Soit $P = X^6 - X^3 + 1$.

1 Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

2 Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Calculer $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} \\ \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} \end{cases}$

Correction :

1

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est une racine de } P &\iff P(\alpha) = 0 \\ &\iff \alpha^6 - \alpha^3 + 1 = 0 \\ &\iff \alpha^3 = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \alpha^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &\iff \exists k \in [\![0,2]\!], \quad \alpha = e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \text{ ou } \alpha = e^{i\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \\ &\iff \alpha \in \left\{ e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}} \right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{7i\frac{\pi}{9}}\right)\left(X - e^{-\frac{7i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{5i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{-\frac{5i\pi}{9}}\right)}$$

2

$$\boxed{P = \left(X^2 - 2\cos\frac{\pi}{9}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{5\pi}{9}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{7\pi}{9}X + 1\right)}$$

3

– D'après les relations coefficients racines, la somme des 6 racines est nulle, i.e.

$$e^{\frac{i\pi}{9}} + e^{-\frac{i\pi}{9}} + e^{\frac{7i\pi}{9}} + e^{-\frac{7i\pi}{9}} + e^{\frac{5i\pi}{9}} + e^{-\frac{5i\pi}{9}} = 0$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9}} = 0$$

– Si on remplace X par i dans la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient :

$$P(i) = \left(-2\cos\frac{\pi}{9}i\right)\left(-2\cos\frac{5\pi}{9}i\right)\left(-2\cos\frac{7\pi}{9}i\right)$$

$$i = 8i\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{8}}$$