Fichiers Polynomes a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Montrer que $X^2 - X + 1$ divise $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction : $X^2 - X + 1 = (X+j)(X+j^2)$.

Or $P(-j) = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = j^{2n+4} - (j)^{2n+1} = 0$.

Donc $-j$ et par suite $-j^2$ sont des racines de P. CQFD.

Exercice 2 : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2+\sqrt{3})$.

Exercice 4 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P = (\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Correction : $P = (\cos\theta + X\sin\theta)^n = (X^2+1)Q + (aX+b)$.

$\begin{cases} P(i) = ai + b \\ P(-i) = -ai + b \end{cases}$ donc $\begin{cases} e^{ni\theta} = ai + b \\ e^{-ni\theta} = -ai + b \end{cases}$ et $\begin{cases} a = \sin\theta \\ b = \cos\theta \end{cases}$

$R = X\sin\theta + \cos\theta$.

Exercice 5 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ $(a \neq b)$.

Donner le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

Correction : $P = (X-a)(X-b)Q + (uX+v)$.

$\begin{cases} P(a) = ua + v \\ P(b) = ub + v \end{cases}$ donc $\begin{cases} u = \dfrac{P(b)-P(a)}{b-a} \\ v = \dfrac{bP(a)-aP(b)}{b-a} \end{cases}$

$R = \dfrac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \dfrac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$.

Exercice 6 : Effectuer la division euclidienne de $X^3 + iX^2 + X$ par $X - i + 1$.

Correction : $Q = X^2 + (-1+2i)X - 3i$

$R = 3 + 3i$.

Exercice 7 : Soit $P = X^n$ et $Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Exercice 8 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P = X^{2n} + 2X^n + 1$ par $Q_1 = (X-1)(X-2)$.

Exercice 9 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P = X^{2n} + 2X^n + 1$ par $Q_2 = X^2 + 1$.

Exercice 10 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $(X-3)(X-2)$.

Exercice 11 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $(X-2)^2$.

Exercice 12 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Sachant que le reste dans la division euclidienne de P par $X-a$ (respectivement $X-b$) est 1 (respectivement -1), déterminer le reste dans le division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

Exercice 13 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $1+X+X^2+X^3+X^4$.

Correction : $1+X+X^2+X^3+X^4=\left(X^2-2X\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)$.

Exercice 14 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme X^4+1.

Correction : $X^4+1=(X^2-X\sqrt{2}+1)(X^2+X\sqrt{2}+1)$.

Exercice 15 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme X^7-1.

Correction : $X^7-1=(X-1)\left(X^2-2X\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{4\pi}{7}+1\right)\left(X^2-2X\cos\frac{6\pi}{7}+1\right)$.

Exercice 16 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6+3X^4+3X^2+1$.

Correction : $X^6+3X^4+3X^2+1=(X^2+1)^3$.

Exercice 17 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6+2X^4+2X^2+1$.

Correction : $X^6+2X^4+2X^2+1=(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

Exercice 18 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme X^8+X^4+1.

Correction : $X^8+X^4+1=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-X\sqrt{3}+1)(X^2+X\sqrt{3}+1)$.

Exercice 19 : $P=(X^2-X+1)^2+1$.
Vérifier que i est racine de P. En déduire la factorisation complète de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20 : On considère $H_0=1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1}=H_n'-2XH_n$.
Déterminer H_1, H_2, H_3.
Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n.

Correction : $H_0=1$
$H_1=-2X$
$H_2=4X^2-2$
$H_3=-8X^3+12X$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $X^2 - aX + 1 | X^4 - X + a$.

Correction : $X^4 - X + a = (X^2 - aX + 1)(X^2 + aX + a^2 - 1) + (a^3 - 2a - 1)X - a^2 + a + 1$.

$$X^2 - aX + 1 | X^4 - X + a \iff \begin{cases} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ -a^2 + a + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+1)(a^2 - a - 1) = 0 \\ -a^2 + a + 1 = 0 \end{cases} \iff -a^2 + a + 1 = 0.$$

On en déduit $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2 : Soit $P_n = X^n + X + 1$.
Déterminer quotient et reste dans la division euclidienne de P_n par $(X-1)^2$.

Correction : Taylor !

Exercice 3 : Factoriser $X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$.

Exercice 4 : On considère le polynôme $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X$.

1. Vérifier que P admet une racine imaginaire pure.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction : $P = X(X-i)(X+i)(X-j)(X-j^2)$
$P = X(X^2+1)(X^2+X+1)$

Exercice 5 : On considère le polynôme $P = X^{n+1} - (n+1)X + n$.
Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P ?

Exercice 6 : Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que P_n n'a pas de racines multiples.
2. Déterminer le nombre de racines de P_n.

Exercice 7 : Résoudre $(1-X)P' - P = X^n$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction : Posons $Q = (1-X)P$. On a $Q' = X^n$ d'où $Q = \dfrac{X^{n+1}}{n+1} + k$, soit $(1-X)P = \dfrac{X^{n+1}}{n+1} + k$.
Comme 1 est une racine de $\dfrac{X^{n+1}}{n+1} + k$, on a $k = -\dfrac{1}{n+1}$ et donc $(1-X)P = \dfrac{X^{n+1}-1}{n+1} = \dfrac{(X-1)(X^n + \dots + X + 1)}{n+1}$.
Ainsi $P = \dfrac{-1}{n+1}(X^n + \dots + X + 1)$.

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(A - 2I_3)(A - 3I_3)$.
2. En déduire A^n en fonction de A^2, A et I_3 pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : $A(A-2I_3)(A-3I_3)=0_3$.

On effectue la division euclidienne de X^n par $X(X-2)(X-3)$:

$X^n = X(X-2)(X-3)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$.

On a $\begin{cases} 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \\ 3^n = 9a_n + 3b_n + c_n \\ c_n = 0 \end{cases}$. On obtient $a_n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}$, $b_n = \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}$ et $c_n = 0$.

Donc $A^n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}A^2 + \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}A$.

Exercice 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A-I_3)(A+3I_3)$ et en déduire A^2 en fonction de A et I_3.
2. De manière générale, montrer que A^k pour $k \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $A^k = a_kA + b_kI_3$.
3. Trouver a_k et b_k.

Correction : $(A-I_3)(A+3I_3) = 0_3$ donc $A^2 = -2A + 3I_3$.

$\begin{cases} a_{k+1} = b_k - 2a_k \\ b_{k+1} = 3a_k \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a_k = \dfrac{1-(-3)^k}{4} \\ b_k = \dfrac{3+(-3)^k}{4} \end{cases}$.

Exercice 10 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$.
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. A est-elle inversible ?

Correction : On effectue la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$:

$X^n = X(X-1)(X-2)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$.

On a $\begin{cases} 1^n = a_n + b_n + c_n \\ 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \\ c_n = 0 \end{cases}$. On obtient $a_n = 2^{n-1} - 1$, $b_n = 2 - 2^{n-1}$ et $c_n = 0$.

Donc $A^n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}A^2 + \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}A$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = 6X^4 + X^3 + (6i+10)X^2 + (2+i)X - (4+2i)$ sachant qu'il admet des racines réelles.

Correction : $P = (2X-1)(3X+2)(X^2+2+i)$

$$= (2X-1)(3X+2)\left(X - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right).$$

Exercice 2 : Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Correction : β est une racine multiple de P $\iff$ $P(\beta) = P'(\beta) = 0$.

Or $P'(\beta) = 0 \iff 7(\beta+1)^6 - 7\beta^6 = 0 \iff (\beta+1)^6 = \beta^6$.

0 n'est pas solution de cette équation donc

$$P'(\beta) = 0 \iff \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^6 = 1 \iff 1 + \frac{1}{\beta} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}.$$

On cherche les racines réelles donc $k = 3$ et $\beta = -\frac{1}{2}$.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 - a = 0 \iff a = \frac{1}{2^6}.$$

Exercice 3 : On considère $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$. Montrer que $P(1) = Q(1) = 0$.

Réciproque ?

Correction : On écrit : $P(X^3) + XQ(X^3) = (X^2 + X + 1)S$.

On a $\begin{cases} P(1) + jQ(1) = 0 \\ P(1) + j^2Q(1) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} P(1) = 0 \\ Q(1) = 0 \end{cases}$.

Réciproquement, si $P(1) = Q(1) = 0$, alors en posant $T(X) = P(X^3) + XQ(X^3)$, on a $T(j) = 0$ et $T(j^2) = 0$.

Par conséquent, $(X - j)(X - j^2) | T$, c'est-à-dire $X^2 + X + 1$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$.

Exercice 4 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$.

Montrer que si les racines de P sont toutes réelles et simples, alors il en est de même pour P′.

Exercice 5 : Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Correction :

1. Si $P = 0$, P convient.
2. Si $P = 0$, on peut écrire : $P = a_p X^p + \cdots$ avec $a_p \neq 0$.
   - D'une part, $P(2X) = a_p(2X)^p + \cdots = 2^p a_p X^p + \cdots$.
   - D'autre part, $P' = p a_p X^{p-1} + \cdots$ et $P'' = p(p-1)a_p X^{p-2} + \cdots$.

     Donc $P'(X)P''(X) = p^2(p-1)a_p^2 X^{2p-3} + \cdots$.

   $$P(2X) = P'(X)P''(X) \implies \begin{cases} 2^p a_p = p^2(p-1)a_p^2 \\ p = 2p - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a_p = \frac{4}{9} \\ p = 3 \end{cases}.$$

   On pose $P = \frac{4}{9}X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et on trouve que $P = \frac{4}{9}X^3$.

Bilan : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0, \frac{4}{9}X^3\right\}}$.

Exercice 6 : Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tels que $(X-1)^4 | P - 1$ et $(X+1)^4 | P + 1$.

Correction : Comme, $(X-1)^4|P-1$, 1 est racine d'ordre 4 de $P-1$.

Par conséquent, $P(1)=1$ et 1 est racine d'ordre 3 de P'.

De même, $P(-1)=-1$ et -1 est racine d'ordre 3 de P'.

Par conséquent, $(X-1)^3(X+1)^3|P'$, et comme $\deg P'=6$, $P'=\lambda(X-1)^3(X+1)^3=\lambda(X^2-1)^3=\lambda(X^6-3X^4+3X^2-1)$

$P=\lambda(\frac{X^7}{7}-\frac{3X^5}{5}+X^3-X+k)$.

Les conditions $P(1)=1$ et $P(-1)=-1$ amènent $\lambda=-\frac{35}{16}$ et $k=0$.

$$P=\frac{-5X^7+21X^5-35X^3+35X}{16}.$$

Exercice 7 : Trouver les polynômes $P\in\mathbb{R}_4[X]$ tels que $(X-2)^2|P+10$ et $(X+2)^3|P-12$.

Correction : Comme, $(X-2)^2|P+10$, 2 est racine d'ordre 2 de $P+10$.

Par conséquent, $P(2)=-10$ et 2 est racine d'ordre 1 de P'.

De même, $P(-2)=12$ et -2 est racine d'ordre 2 de P'.

Par conséquent, $(X-2)(X+2)^2|P'$, et comme $\deg P'=3$, $P'=\lambda(X-2)(X+2)^2$

$$P=\frac{33}{128}X^4+\frac{11}{16}X^3-\frac{33}{16}X^2-\frac{33}{4}X+\frac{41}{8}.$$