

XXI

Analyse asymptotique

Contenu

I. Négligeabilité	1
I.1 Introduction	1
I.2 Opérations sur les petits o	4
II. Développements limités	6
II.1 Introduction	6
II.2 Primitivation des développements limités	9
II.3 Formule de Taylor-Young	10
II.4 Dérivation des développements limités	12
II.5 Développements usuels	13
II.6 Opérations sur les développements limités	15
III. Équivalence	19
III.1 Introduction	19
III.2 Application : Série harmonique et constante d'Euler	23
III.3 Opérations sur les équivalents	23
IV. Domination	25
V. Exemples et Applications	27
V.1 Recherche d'un équivalent	27
V.2 Calculs de limites	27
V.3 Position locale d'une fonction par rapport à une tangente	27
V.4 Développement asymptotique	28
V.5 Asymptotes et limite en $+\infty$	28

Dans ce chapitre, la lettre I qui servira d'ensemble de définition désignera une partie quelconque de \mathbb{R} .

I NÉGLIGEABILITÉ

I.1 Introduction

Définition 1 (Négligeabilité) :

Fonctions : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou

$f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et on lit :

« f est un petit o de g au voisinage de a ».

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et on lit :

« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un petit o de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini ».

Remarques :

- Dire qu'une fonction ou une suite est un $o(1)$ au voisinage d'un point a ou de $+\infty$ signifie que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1} = 0$ i.e. un $o(1)$ est une fonction ou une suite de limite nulle en a ou $+\infty$ respectivement.

Exemples 1 :

- $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{x^k}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $o(x^k) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$.
- Soit $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x$ alors $f \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$ et $f \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^6)$.

- L'intérêt de cette notation est qu'on peut l'utiliser dans les calculs. On peut, par exemple, considérer $u_n = v_n + o(w_n)$. C'est notamment pratique pour formaliser des approximations.

Ainsi, dire que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

signifie que pour n assez grand, u_n est à peu près égal à $2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}$, et que l'erreur faite en approchant u_n par cette expression est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$.

Le terme $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ contrôle l'erreur et exprime que ce qu'il reste est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$ pour n assez grand. Il est donc inutile de l'écrire et on dira souvent que le reste est « absorbé » par le o.

Exemples 2 :

- $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$ et $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.
- $\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
- $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^4)$.
- $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$.
- $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les petits o sont la formalisation définitive des croissances comparées.

« Certains infinis sont plus infinis que d'autres,
certains zéros sont plus zéros que d'autres. »

Théorème 1 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) :Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $(\ln x)^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$.
- Si $0 < a < b$ alors $a^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(b^x)$.
- Si $a > 1$ alors $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x)$.

En particulier, si $\alpha > 0$, alors $x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\alpha x})$.**Exemple 3 :** Si $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_q x^q$ ($p \geq q$) est une fonction polynomiale, alors :

$$P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_p x^p + o(x^p) \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_q x^q + o(x^q).$$

Théorème 2 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de 0) :Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o((\ln x)^\beta)$ ou $(\ln x)^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Théorème 3 (Croissances comparées usuelles des suites) :

- Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites. Il suffit de remplacer x par n .
- $\forall a \in \mathbb{R}, a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$.

Exercice 1 : Soient $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Simplifier les expressions suivantes avec un degré de précision de l'ordre du $o(x)$:

1 $\ln(1+x) + \sin x$.

2 $\ln(1+x) - \sin x$.

3 $\sin(x) \ln(1+x)$ à $o(x^3)$ près.

Théorème 4 (Limites et petits o) :**Fonctions :** Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff f \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1)$.

En particulier, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff f \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$.

En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$.

I.2 Opérations sur les petits o

Proposition 5 (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives) : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Fonctions : Si $f = o(g)$ alors $f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$.

Suites : Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = o(v_n)$.

Exemple 4 : Si on admet l'égalité $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{1}{n}} &= 2 + \frac{2}{n} + 2o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 2 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Proposition 6 (La somme de deux petits o est un petit o) :

Fonctions : Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ alors $f \pm g = o(h)$.

Suites : Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.

ATTENTION

$o(h) - o(h) \neq 0! \dots$

$x = o(x^3)$ et $x^2 = o(x^3)$ mais $x - x^2 = o(x^3) \neq 0$.

Exemple 5 : Avec $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) + \sin(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2o(x^3) \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Proposition 7 (Un petit o d'un petit o est un petit o) :

Fonctions : Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.

Suites : Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

En d'autres termes, la relation « être négligeable » est transitive.

À part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de négligeabilité se comporte à peu près comme une relation d'ordre stricte.

Exemple 6 : Prenons l'égalité $e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n^2}} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On dit que l'on a *tronqué* à l'ordre $\frac{1}{n}$.

Proposition 8 (Les petits o sont compatibles avec le produit) :

Fonctions : Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$ et $g \underset{x \rightarrow a}{=} o(k)$ alors $fg \underset{x \rightarrow a}{=} o(hk)$.

Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ alors $fh \underset{x \rightarrow a}{=} o(gh)$.

Suites : Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(t_n)$ alors $u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n t_n)$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n w_n)$.

En particulier, $x^2 \times o(x) = o(x^3)$, $x \times o\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)$, ...

Exemple 7 : Reprenons les égalités $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ et $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sin(x) \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1+x+o(x))(x+o(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x^2 + x \times o(x) + x \times o(x) + o(x) \times o(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + \underbrace{x^2 + 2x \times o(x) + o(x^2)}_{\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x). \end{aligned}$$

Proposition 9 (Les petits o sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie sur un voisinage de b à valeurs dans I .

Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ et $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$ alors $f \circ \varphi \underset{x \rightarrow b}{=} o(g \circ \varphi)$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_{\varphi(n)})$.

On peut donc composer à droite par une fonction φ ce qui revient à changer la variable x en une autre $u = \varphi(x)$.

Composer à gauche reviendrait à changer la fonction. Cela ne peut être possible par essence.

Exemple 8 : $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ alors $\sqrt{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.

De même, comme $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$ alors $2^{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^{n^2})$.

En pratique, pour $a \neq \pm\infty$, ce résultat permet en particulier de ramener par la translation $\varphi : x \mapsto x + a$ toute relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ au voisinage de a en une relation

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(g(a + h)) \text{ au voisinage de } 0.$$

ATTENTION

Il est formellement interdit de composer une relation de négligeabilité par la gauche.

Par exemple, $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln x} = \frac{1}{2} \neq 0 \implies \ln(\sqrt{x}) \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.

II DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

II.1 Introduction

Nous cherchons dans ce paragraphe à approcher les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0.

Nous allons, par exemple, montrer que :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

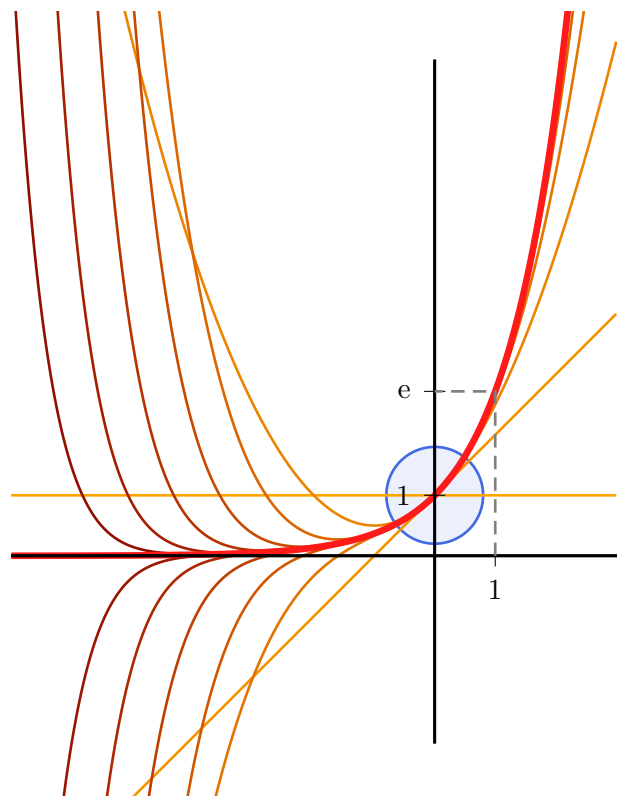


Figure XXI.1 – Courbe représentative de $x \mapsto \exp x$ approchée par des fonctions polynomiales au **voisinage** de 0.

Définition 2 (Développement limité) : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f possède un *développement limité* à l'ordre n au *voisinage* de a , noté aussi un $DL_n(a)$, s'il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

L'expression polynômiale $P(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$ est appelé la *partie régulière* du développement limité.

Plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a . Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise :

L'ordre n du $o((x-a)^n)$ contrôle l'erreur de l'approximation.

Remarques :

- On note toujours $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.
- Le reste du $DL_n(a)$ i.e. $o((x-a)^n)$, donne l'ordre du développement et peut aussi se mettre, suivant les besoins, sous la forme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples 9 :

- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$: $DL_1(0)$ de $\sin(x)$, sa partie régulière est x .
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} \underset{u = \frac{1}{x^2}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0$ alors $e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.
C'est un $DL_2(0)$ de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ au voisinage de 0 dont la partie régulière est nulle.

Exercice 2 : Comment s'écrit le développement limité d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme au voisinage de 0 ?

Exercice 3 (DL de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0) : Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Méthode I (Translation et troncature) :

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0.

Précisément, si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors, après composition à **droite** par la fonction $x \mapsto x+a$, on obtient :

$$f(x+a) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

- On peut tronquer un développement limité d'ordre n en un développement limité à un ordre inférieur $m \leq n$ en oubliant les termes de degré compris en $m+1$ et n .

Plus précisément, si on a un développement limité de f à l'ordre n i.e. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ alors, pour $m \leq n$, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^m + o((x-a)^m)$ est un développement limité de f à l'ordre m .

Théorème 10 (Unicité du développement limité) : Si f admet un développement limité au voisinage d'un réel a alors celui-ci est unique.

Corollaire 10.1 (Parité/Imparité) : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction où $0 \in I$ et I est un intervalle symétrique par rapport à 0.

- Si f est paire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang impair sont nuls.
- Si f est impaire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang pair sont nuls.

Exemple 10 : Reprenons l'exemple (3), en composant à droite par $x \mapsto x^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + o((-x^2)^n) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

Tous les coefficients de rangs impairs sont nuls.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème 11 (Développement limité et continuité/dérivabilité) : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- f est continue en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a .

Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

- f est dérivable en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a .

Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Remarque : Dans un développement limité de f au voisinage de a , le coefficient d'ordre 0 est TOUJOURS $f(a)$ et celui d'ordre 1, TOUJOURS $f'(a)$.

Le **théorème** (11) ne va pas plus loin et il existe des fonctions admettant des développements limités d'ordre supérieur à deux au voisinage d'un point a sans être deux fois dérivables en ce point.

Par exemple, considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme la fonction \sin est bornée,

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o(x^2). \quad (\text{XXI.1})$$

Ainsi, f admet le développement limité à l'ordre 2 en 0 suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2).$$

Or, il est facile de montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* , avec

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1). \quad (\text{XXI.2})$$

Avec (XXI.1), f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et ce prolongement est également dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ d'après (XXI.2).

Or, $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

La fonction f , bien qu'admettant un développement limité à l'ordre 2, n'est pas deux fois dérivable en 0.

ATTENTION

II.2 Primitivation des développements limités

On commence par un lemme simple avant la version plus générale :

Lemme 1 : Soient $g \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n)$ alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x - a)^{n+1})$.

Théorème 12 (Primitivation des développements limités) : Soient $f \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ,

$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ alors f possède un développement limité à l'ordre $n + 1$ au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x - a)^{k+1} + o((x - a)^{n+1}).$$

On prendra garde au fait que le premier coefficient est alors $f(a)$.

Exemple II (DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0) : Comme $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$, alors

$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ par composition à droite par $x \mapsto -x$ puis, par primitivation et avec

$[0]$. ou $[x; a]$ et $]x; a[$ respectivement.

$\ln(1 + 0) = \ln 1 = 0 :$

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n). \quad (\text{Remarque : } (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}) \end{aligned}$$

Exercice 4 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

À partir de la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ trouver un DL_5 au voisinage de 0 de $\tan(x)$.

II.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young) : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$.

Si $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a et, plus précisément :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n) \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n). \end{aligned}$$

Le polynôme P_n défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$ est appelé *polynôme de Taylor* d'ordre n associé à f au point a .

Remarques et commentaires importants

- Le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de a n'est rien d'autre que l'expression de la droite tangente à la courbe de f en a .
- La formule de Taylor-Young ne donne qu'une information locale au voisinage de a .

En aucun cas, elle ne peut être utilisée pour une étude globale mais localement il s'agit de la meilleure approximation par un polynôme de degré au plus n .

Même si f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I , on n'est pas assuré que le développement de Taylor tende vers f lorsque n tend vers $+\infty$.

ATTENTION

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} dont toutes les dérivées sont nulles en 0 *i.e.* son développement limité en 0 à tout ordre est nul sans que la fonction f ne le soit ($f(1) = \frac{1}{e}$).

- Le **théorème (13)** est avant tout un théorème d'existence des développements limités.

Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une implication (seulement) :

f continue	\Leftrightarrow	Existence d'un développement limité à l'ordre 0.
f dérivable	\Leftrightarrow	Existence d'un développement limité à l'ordre 1.
f de classe \mathcal{C}^n	\Rightarrow	Existence d'un développement limité à l'ordre n .
f de classe \mathcal{C}^∞	\Rightarrow	Existence d'un développement limité à tout ordre.

La réciproque n'est pas du tout vraie, il existe des fonctions qui admettent par exemple des développements limités à tout ordre en 0 sans être de classe \mathcal{C}^∞ .

Par exemple, la fonction définie en (XXI.1) par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \tag{XXI.3}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

ATTENTION

admet un développement limité (nul) à l'ordre 2 en 0 sans être de classe \mathcal{C}^2 dans un voisinage de 0.

- Retenez aussi que l'existence d'un DL à l'ordre n au voisinage de a n'implique pas l'existence de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en a comme pour la fonction définie en (XXI.3).

Exercice 5 (DL de e^x au voisinage de 0) :

- 1 Donner le développement limité de e^x au voisinage de 0.
- 2 En déduire ceux de $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$.

Exemple 12 (DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0) : Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^n sur $] -1; +\infty[$ et, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est :

$$x \mapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a alors :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Remarques :

- Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \llbracket 0; \alpha \rrbracket$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Dans ce cas et ce cas seulement, le développement limité de $(1+x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0 est tout simplement le développement de la formule du binôme.

Conclusion : Quand vous cherchez un développement limité de $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0, utilisez simplement la formule du binôme :

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 = 1 + 5x + 10x^3 + o(x^3).$$

- Pour $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, le développement limité de $\frac{1}{(1+x)^{-\alpha}}$ est, au signe près, la dérivée terme à terme $-(\alpha+1)^{\text{ème}}$ de celui de $\frac{1}{1+x}$ i.e. on peut donc dériver une série géométrique.

De manière « plus synthétique » : $\frac{1}{(1+x)^{-\alpha}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-\alpha-1}{k-\alpha-1} x^k + o(x^n).$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on généralise les coefficients binomiaux en posant :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

On réécrit alors le développement limité de $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k + o(x^n).$$

Exercice 6 (DL de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ au voisinage de 0) :

- 1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\cos^{(k)}(0)$ et $\sin^{(k)}(0)$.
- 2 En déduire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions cosinus et sinus.

Exemple 13 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) : La fonction tangente est de classe au moins \mathcal{C}^3 sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

D'après la formule de Taylor-Young, il reste à calculer ses quatre premières dérivées en 0.

$$\begin{aligned} \tan(0) &= 0, & \tan''(0) &= 2 \tan'(0) \tan(0) \\ \tan'(0) &= 1 + \tan^2(0) = 1, & &= 0, \\ & & \text{et } \tan'''(0) &= 2 \tan'(0) + 6 \tan'(0) \tan^2(0) \\ & & &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

II.4 Dérivation des développements limités

Théorème 14 (Dérivation des développements limités (Admis)) : Soient $f \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a et si sa dérivée f' y admet également un développement limité à l'ordre $n-1$ alors, la partie principale du développement limité de f' est la dérivée de celle du développement limité de f au voisinage de a .

ATTENTION

Il se peut très bien, hélas, que f admette un développement limité à l'ordre n sans que f' admette un développement limité à l'ordre $n-1$.

La fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en (XXI.3) avec $f(0) = 0$, admet un $DL_2(0)$ sans que sa dérivée admette un $DL_1(0)$.

En effet, si c'était le cas, en vertu du théorème (11), f' serait dérivable en 0, ce qu'elle n'est pas.

Pour pouvoir dériver un DL, il est nécessaire que la dérivée admette elle-même un développement limité et dans ce cas et seulement celui-là, son DL sera la dérivée de sa primitive. C'est ce que dit le théorème.

Exemple 14 (DL de $\frac{1}{(1-x)^2}$ au voisinage de 0) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $] -\infty ; 1[$ et on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + o(x^{n+1}).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est de classe au moins \mathcal{C}^n sur $] -\infty ; 1[$ donc admet un développement limité en 0 d'après le **théorème (13)**.

On peut donc appliquer le **théorème (14)** et on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Exercice 7 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) : À partir de la relation

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x),$$

retrouver un DL_5 au voisinage de 0 de la fonction tangente.

II.5 Développements usuels

$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$
$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$
$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$

$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ $\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k + o(x^n) \text{ où } \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} \text{ est le coefficient du binôme généralisé à } \alpha \in \mathbb{R}$
$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} x^n + o(x^n).$

$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$
$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$

$$\boxed{\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8).$$

Tout a déjà été fait mais pour que vous reteniez bien les méthodes, un petit résumé :

1 **a** À partir de la série géométrique $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$, on obtient :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n). \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)$$

b En composant à droite par $x \mapsto -x$ dans $\left(\frac{1}{1-x}\right)$, on a :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n). \quad \left(\frac{1}{1+x}\right)$$

c En intégrant terme à terme $\left(\frac{1}{1+x}\right)$:

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \quad (\ln(1+x))$$

d En composant à droite par $x \mapsto x^2$ dans $\left(\frac{1}{1+x}\right)$, on a :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}). \quad \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

e En intégrant terme à terme $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$:

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}). \quad (\arctan(x))$$

2 **a** En revenant au **théorème (13)**, on a montré à l'**exemple (12)** :

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k + o(x^n). \quad ((1+x)^\alpha)$$

où $\binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ est le coefficient du binôme généralisé.

b Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, à partir de $((1+x)^\alpha)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k-3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2k)} x^k + o(x^n) & (\sqrt{1+x}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

3 **a** En revenant au **théorème (13)**, on a montré dans l'**exercice (5)** et l'**exercice (6)** :

$$\begin{aligned} e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n). & (e^x) \\ \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}). & (\cos(x)) \\ \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}). & (\sin(x)) \end{aligned}$$

(b) En prenant la partie paire et impaire de (e^x) :

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}). \quad (\operatorname{ch}(x))$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}). \quad (\operatorname{sh}(x))$$

4] Enfin le développement limité de $\tan(x)$ au voisinage de 0 se trouve de plusieurs manière :

(a) Comme quotient des développements limités de $\sin(x)$ par $\cos(x)$ à l'exercice (11) .

(b) À partir de la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ et par unicité des développements limités à l'exemple (13) .

(c) En mettant en pratique la méthode exposée lors de la remarque à l'exercice (4) .

(d) Par primitivation du développement limité de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ trouvé à l'exercice (12) .

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

II.6 Opérations sur les développements limités

On se limite dans tout ce paragraphe à des développements limités en 0; les fonctions usuelles étant développées en ce point.

On se ramènera, en pratique, systématiquement à ce cas par changement de variable.

— En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a , noté $DL_n(a)$, sous la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n),$$

alors, en posant $x = a + h$, la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n).$$

— Si f est définie au voisinage de $\pm\infty$, on pourra poser $h = \frac{1}{x}$, la fonction $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ admet alors un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{h^k} + o\left(\frac{1}{h^n}\right).$$

On dit alors que f admet un *développement asymptotique* en $\frac{1}{h}$ d'ordre n en $\pm\infty$ et on remarquera que la partie régulière n'est pas un polynôme en x mais en $\frac{1}{x}$.

Exercice 8 (DL de $\ln(x)$ au voisinage de 2) : Donner un DL_3 de $\ln(x)$ au voisinage de 2.

Proposition 15 (Opérations algébriques) : Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} Q(x) + o(x^n) \quad \text{où } P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est $\lambda P(x) + Q(x)$.
- fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est $P(x) \times Q(x)$ tronqué à l'ordre n .

Exemples 15 :

- Le DL_5 de $x \mapsto e^x + \cos(x)$ en 0 est :

$$e^x + \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5).$$

- Pour les produits, on se contente, en pratique, de développer le produit des polynômes en omettant d'écrire les termes de degré supérieur à l'ordre recherché pour le DL.

Ainsi, le DL_5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est :

$$\begin{aligned} e^x \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Exercice 9 : Donner un $DL_7(0)$ de $\text{sh}^4(x)$.

ATTENTION

Comme on travaillera essentiellement avec des DL en 0, attention à ne pas composer par une fonction qui n'a pas une limite nulle quand x tend vers 0 !

On justifiera bien que l'on a bien un $o(1)$ avant d'utiliser les DL usuels en 0.

Proposition 16 (Composition) : Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} Q(x) + o(x^n) \quad \text{où } P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

Si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ alors $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est $(P \circ Q)(x)$.

Lors de la recherche de développements limités de fonctions composées, il faudra prendre garde à prendre en compte tous les termes du même ordre.

Par exemple, deux développements limités FAUX pour l'illustration :

On a :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 + o(x^2).$$

FAUX : $e^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x+o(x)}$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Les termes d'ordre 2 du DL de $\frac{1}{1-x} - 1$ n'ont pas été pris en compte.

FAUX : $e^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x+x^2+o(x^2)}$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

Les termes d'ordre 2 du DL de e^u avec $u = x + x^2 + o(x^2)$ n'ont pas été pris en compte.

CORRECT : $e^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x+x^2+o(x^2)}$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x + x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + \cancel{x^2} + \cancel{o(x^2)})^2$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}(x^2) + o(x^2)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

ATTENTION

Exemple 16 : Cherchons le DL_5 en 0 de $x \mapsto e^{\cos(x)}$.

$$e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} e \times e^{\underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}_{=u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 + u + \frac{1}{2}u^2 \right) + \underbrace{o(u^2)}_{=o(x^5)}$$

Inutile d'aller plus loin car $u \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$,

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 \right) + o(x^5),$$

en tronquant tous les termes d'ordre supérieur à 5.

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5)$$

Ne pas confondre composition à droite et à gauche.

En effet, si $\ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ est un développement à l'ordre 4, voire 5, en composant à droite, il en est tout autrement de $(\ln(1+x))^2$ où la composition a lieu à gauche si l'on veut un développement au même ordre :

ATTENTION

$$\begin{aligned} (\ln(1+x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} & \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right)^2 \\ & = x^2 + x^3 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

On remarquera que l'on a pu se contenter d'un DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ pour obtenir un DL à l'ordre 5 grâce à la présence du x dans le développement qui nous a fait gagner un ordre.

Méthode 2 (Développement limité d'une réciproque) :

Soit f une fonction bijective ou au moins injective au voisinage de 0, de classe \mathcal{C}^n tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

Alors f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n en 0.

On peut le déterminer en identifiant les DL

$$x = (f^{-1} \circ f)(x) + o(x^n)$$

fournissant $n+1$ équations dont les inconnues sont les coefficients du DL de f^{-1} .

L'identification est possible du fait de l'unicité du développement limité.

Exercice 10 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x e^{x^2}$.

- 1 Démontrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- 2 Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
- 3 Donner ce développement limité.

Proposition 17 (Inversion) : Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \neq 0$.

Alors $\frac{1}{f}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en composant le DL_n en 0 de $\frac{1}{1+u}$ avec celui de $\frac{f(x)-a}{a}$ et en multipliant par $\frac{1}{a}$.

Méthode 3 (Quotient de développements limités) :

Dans le cas des quotients, on essaiera toujours de les écrire sous la forme $\frac{u(x)}{1+v(x)}$ avec $v \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$, ce qui permet de composer par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ dont on connaît le développement limité, puis effectuer un produit de DL.

Exemple 17 : Cherchons le DL_5 en 0 de $x \mapsto \frac{e^x}{\cos(x)}$.

On commence par écrire $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$.

En posant $u = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, on applique le DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}x^4 + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) \\ \frac{e^x}{\cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{10}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Exercice 11 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

Donner un $DL_5(0)$ de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Exercice 12 (DL de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ au voisinage de 0) :

Donner un $DL_5(0)$ de $\frac{1}{\cos^2(x)}$.

III ÉQUIVALENCE

III.1 Introduction

Définition 3 (Équivalence) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$, si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemples 18 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2.$
- $x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$
- $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$
- $3^n + 2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n.$
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$
- $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.$
- $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{2}.$

Quand vous cherchez un équivalent, votre résultat ne doit jamais se présenter comme une somme de deux ou trois termes de tailles distinctes.

Par exemple, si l'on vous demande un équivalent de $x - 3x^2 + x^5$ lorsque x tend vers 0, ne répondez pas $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - 3x^2.$

ATTENTION

C'est correct puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3x^2 + x^5}{x - 3x^2} = 1$ mais non abouti car vous pouvez encore comparer x et x^2 , et en l'occurrence $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x).$

L'équivalence intéressante est donc $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

En résumé : il ne doit en rester qu'un : le plus gros, celui qu'on voit de loin.

Théorème 18 (La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence) : Qu'on parle de fonctions au voisinage d'un point ou de suites, la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

Proposition 19 (Équivalence et petit o) :

Fonctions : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}.$

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0.$

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x)) = \underset{x \rightarrow a}{=} g(x)(1 + o(1)).$$

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n(1 + o(1)).$$

Corollaire 19.1 (Équivalent d'un polynôme) : Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d.$

$$\text{Alors } P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_d x^d.$$

Théorème 20 (Développement limité et équivalence) : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}, n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $a_p, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$

Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

En résumé, le premier terme NON NUL d'un développement limité peut tenir lieu d'équivalent.

ATTENTION

Une fonction ou une suite ne peuvent JAMAIS être équivalentes à 0.

Il suffit simplement de pousser le DL au lieu de dire une énorme bêtise.

À retenir ! :

■ $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$

■ $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$

■ $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

Proposition 21 :

■ $\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

■ $\arccos(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x.$

■ $\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

Ne présentez jamais vos équivalents comme une somme de termes de tailles distinctes car dans une telle somme en réalité, seul le plus grand des termes compte, les autres sont négligeables.

ATTENTION

À la place de $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, n'écrivez donc pas $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$. Cette équivalence est correcte, mais comme $x = o(1)$, écrire que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ c'est écrire $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, résultat moins précis *i.e.* la précision de l'équivalence $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ est en $o(x)$ alors que la précision de l'équivalence $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ est $o(1)$.

Théorème 22 (Formule de Stirling^[1]) :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

La démonstration est hors-programme mais pas la formule.

[1]. **James Stirling** (né en mai 1692 à Garden près de Stirling, mort le 5 décembre 1770 à Édimbourg), est un mathématicien écossais.

L'équivalent asymptotique de $n!$, pour lequel Stirling est le plus connu, apparaît dans son ouvrage *Methodus Differentialis*. Un des principaux objectifs de celui-ci était d'étudier des méthodes pour accélérer la convergence des séries.

Proposition 2.3 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

- 1 Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ alors, soit f et g ont toutes les deux la même limite en a , soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a .
- 2 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$.

Suites :

- 1 Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes les deux la même limite, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite en $+\infty$.
- 2 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \not\Rightarrow f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \not\Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

ATTENTION

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ mais $e^x \not\sim x$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ mais $x^2 \not\sim x$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ mais $2^n \not\sim n$.

De plus, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ mais, en général, $u_{n+1} \not\sim u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ mais } 2^{n+1} = 2 \times 2^n \not\sim 2^n.$$

Théorème 2.4 (Conservation du signe) :

Fonctions : Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe dans un voisinage de a .

Suites : Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont du même signe à partir d'un certain rang.

Stirling note d'ailleurs dans sa préface que **Newton** avait étudié ce problème. Beaucoup d'exemples de ses méthodes sont donnés, dont le problème de **Leibniz** de

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Il applique également ses procédés d'accélération à la somme de la série $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ dont la valeur exacte était encore inconnue à l'époque.

Il obtient la relation $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 \binom{2n}{n}}$ qui lui permet d'obtenir la valeur approchée 1,64493406684822643, mais ne reconnaît pas $\frac{\pi^2}{6}$, ce qui sera fait par **Euler** peu d'années après.

Il donne également un théorème à propos de la convergence d'un produit infini. Dans ses travaux sur l'accélération de la convergence des séries se trouve une discussion des méthodes de de **Moivre**.

L'ouvrage contient d'autres résultats sur la fonction Gamma d'**Euler** et la fonction *hypergéométrique*, ainsi que la définition des nombres de Stirling.

ATTENTION

Cela ne signifie pas qu'à partir du rang n , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de signe constant !
Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

III.2 Application : Série harmonique et constante d'Euler

Théorème 25 (Développement asymptotique de la série harmonique) :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1), \quad \text{où } \gamma \simeq 0,5772156649 \dots$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

III.3 Opérations sur les équivalents

Théorème 26 (Petit o et équivalence II) :

Fonctions : $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ et $g \underset{x \rightarrow a}{\sim} h$ alors $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$.

Suites : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.

Exemple 19 : Comme $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ alors :

$$\sin(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Théorème 27 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

1 Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et $h \underset{x \rightarrow a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x \rightarrow a}{\sim} gk$.

2 Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g}$.

3 Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g^\alpha$.

Suites :

1 Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t_n$ alors, soit $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n t_n$.

2 Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.

3 Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Théorème 28 (Les équivalents sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans \mathbb{I} .

Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$ alors $f \circ \varphi \underset{x \rightarrow b}{\sim} g \circ \varphi$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

Avec les équivalents, deux opérations sont **formellement interdites** :

Somme : $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et $3 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - x$ mais : ~~$4 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$~~ .

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

Solution : Pousser les développements limités.

Composition à gauche : $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n + \ln(n)$, mais, si on compose par $x \mapsto e^x$ à gauche ~~$e^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^n$~~ .

En général, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(v_n)$. Même avec des fonctions « gentilles » comme le logarithme ou l'exponentielle, cela peut être faux.

ATTENTION

Méthode 4 (Pour contourner le problème des sommes) :

- Étudier les négligeabilité entre les termes de la somme pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.
- Écrire les équivalents avec un o et effectuer la somme sous cette forme.

1 Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.

2 Sinon, on ne peut pas conclure directement. Il faut étudier l'ordre de grandeur de ce qu'il reste après simplification des parties principales, et pour cela, il faut avoir une meilleure approximation de chaque terme (la connaissance de l'équivalent ne suffit pas). On peut par exemple utiliser un développement limité.

Exemple 20 : $\sqrt{x^2 + \ln(x)} - x = x \left(\sqrt{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}} - 1 \right)$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}u$.

D'où $\sqrt{x^2 + \ln(x)} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{\ln(x)}{2x^2} = \frac{\ln(x)}{2x}$.

Exercice 13 : Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 + x^2) - \sin^2(x)$.

Exercice 14 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $\operatorname{ch}(e^{-n}) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Méthode 5 (Trouver un équivalent simple de $\ln(u_n)$) :

1 Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, utiliser l'équivalent classique.

2 Sinon, écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n(1 + o(1))$, où v_n est un équivalent simple de u_n , puis $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(v_n) + \ln(1 + o(1))$.

Comparer ensuite les deux termes. Autrement dit, il s'agit de mettre le terme prépondérant en facteur dans le logarithme pour le sortir du logarithme.

Évidemment, cela s'adapte aux fonctions.

Exercice 15 : Trouver un équivalent de $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Méthode 6 (Trouver un équivalent simple de e^{u_n}) :

Développer u_n à $o(1)$ près : $u_n = v_n + o(1)$.

S'adapte aux fonctions.

Exercice 16 : Trouver un équivalent en 0 de $e^{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x)}$.

IV DOMINATION

Définition 4 (Domination) :

Fonctions : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$, si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et on lit :

« f est un grand O de g au voisinage de a ».

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on lit :

« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un grand O de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini ».

En particulier, pour les fonctions, un $O(1)$ est une fonction bornée au voisinage de a et, pour les suites, un $O(1)$ est une suite bornée.

Exemples 21 :

- $\sin(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(1)$.
- $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$.
- $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- $[e^n] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(e^n)$.

Proposition 29 (Domination, définition équivalente) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un réel positif M tel que, dans un voisinage de a , $|f(x)| \leq M|g(x)|$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un réel positif M tel que, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq M|v_n|$.

Proposition 30 (Grand O, petit o et équivalence) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ ou $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ alors $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

ATTENTION

La domination n'implique ni la négligeabilité ni l'équivalence. C'est le contraire qui est vrai.

Par exemple, $2x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^2)$ mais $2x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ et $2x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

Exemples 22 :

- Comme $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ alors $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$.

Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 2, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 3.

- De même, $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ entraîne $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + O(x^2)$.

Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 1, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 2.

À retenir 2 : Les théorèmes sur les petits o sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,
- la somme de deux grands O est un grand O,
- un grand O d'un grand O est un grand O,
- avec le produit, tout va bien,
- avec la composition à droite et les suites extraites, tout va bien.

V

EXEMPLES ET APPLICATIONS

V.1 Recherche d'un équivalent

Exercice 17 : Donner un équivalent en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{3-2x}.$$

V.2 Calculs de limites

Exercice 18 : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

V.3 Position locale d'une fonction par rapport à une tangente

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

Si f admet, au voisinage de a , un développement limité de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + (x-a)a_1 + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p),$$

où p est donc le plus petit indice supérieur ou égal à 2 tel que $a_p \neq 0$, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

On a alors $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ *i.e.*

La courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ comme tangente au point a .

On a mieux : la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du **signe** de la fonction $x \mapsto a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

1 Si p est pair, $x \mapsto a_p(x-a)^p$ est du signe **constant** de a_p .

Le graphe de f est donc situé soit au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a soit au-dessous suivant le signe de a_p .

De plus, si $a_1 = 0$ alors $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a *i.e.* f possède un extremum local en a : maximum local si $a_p < 0$, minimum local si $a_p > 0$.

2 Si p est impair, $x \mapsto a_p(x-a)^p$ change de signe en a , donc le graphe de f traverse sa tangente en a : on dit que f possède en a un *point d'inflexion*.

Exemple 23 : Comme $\frac{x \sin x}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$, la fonction $x \mapsto \frac{x \sin x}{1+x^2}$ vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, sa courbe représentative admet l'axe des abscisses comme tangente en 0 et f reste positive au voisinage de 0 donc possède un minimum local en 0.

Exercice 19 : Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1-2x)}{1+x}$.

- 1 Donner un $DL_3(0)$ de f .
- 2 En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 et que f y possède un point d'inflexion.

V.4 Développement asymptotique

On peut également définir des « développements limités » en la variable x au voisinage de $+\infty$. On se ramène alors à 0 par un changement de variables $h = \frac{1}{x}$ et on parle plutôt dans ce cas de *développement asymptotique*.

Exemple 24 :
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exemple 25 :
$$\frac{1}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{300}x^3 + o(x^4).$$

ATTENTION | Si f a un développement asymptotique commençant par un terme de degré $-k$, pour obtenir un DL à l'ordre n du produit fg , il faudra donc augmenter l'ordre du DL de g jusqu'à $n + k$.

Exercice 20 : Montrer que
$$\frac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x).$$

Exercice 21 : Calculer le DA en $+\infty$ à l'ordre 5 de $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$.

V.5 Asymptotes et limite en $+\infty$

Exercice 22 : Calculer
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

Rappel | (Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$) : Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $\pm\infty$.
On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$ si
$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} ax + b + o(1).$$

En particulier, $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$.

Exemple 26 : Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 + [x]^2}{x^2 + 2}$.
Comme $[x] \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + O(1)$ alors, par primitivation, $[x]^2 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x^2 + O(x)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } f(x) &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \frac{x^3 + x^2 + O(x)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \\ &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 + x + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 + x + o(1). \end{aligned}$$

La courbe représentative de f admet donc la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote en $\pm\infty$.

Exercice 23 : Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x} e^{\cos(\frac{1}{x})}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation et la position par rapport à la courbe.