

XXII

Dénombrements



La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main.



Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un événement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

Contenu

I. Généralités sur les ensembles finis	2
I.1 Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)	2
I.2 Ensembles finis et applications	3
I.3 Opérations sur les ensembles et cardinaux	5
II. Dénombrements	7
II.1 Introduction	7
II.2 Listes et Arrangements	8
II.3 Nombre d'applications et combinaisons	9
II.4 Dénombrement des parties d'un ensemble fini	11
III. Retour sur les coefficients binomiaux	13
III.1 Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :	13
III.2 Coefficients binomiaux	14
III.3 Bilan pratique	18

À l'école, en algèbre, j'étais du genre Einstein. Mais plutôt Franck qu'Albert.

Philippe Geluck

I GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES FINIS

I.1 Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Définition 1 : Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments.

On note dans ce cas $\text{card}(\mathbb{E})$ ou $|\mathbb{E}|$ le *cardinal* de \mathbb{E} .

Exemple 1 : $\text{card}(\emptyset) = 0$ et $\text{card}(\{\emptyset\}) = 1$.

On peut définir, comme on le verra plus tard, une notion de cardinal pour des ensembles infinis, mais l'intuition en est moins évidente. Par exemple, \mathbb{N} et \mathbb{Q} ont même cardinal !

Intuitivement, un ensemble fini \mathbb{E} de cardinal n est un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i décrivent \mathbb{E} et sont deux à deux distincts.

En interprétant ceci avec l'application $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \mathbb{E}$,

$$i \mapsto x_i$$

— le fait que les x_i décrivent \mathbb{E} signifie que φ est surjective,

— le fait que les x_i soient deux à deux distincts, signifie que φ est injective.

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 : On dit qu'un ensemble \mathbb{E} est *fini* s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- \mathbb{E} est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son *cardinal* est nul noté $\text{card}(\mathbb{E}) = 0$.
- \mathbb{E} est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$, auquel cas on dit que son *cardinal* est n noté $\text{card}(\mathbb{E}) = n$.

Dans le cas contraire, on dit que \mathbb{E} est infini.

Remarque : Si les ensembles $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, m\}$ sont en bijection, alors $n = m$. Le cardinal d'un ensemble fini \mathbb{E} est donc bien défini. Il indique le nombre d'éléments de \mathbb{E} .

Exemples 2 :

- $\llbracket p; q \rrbracket$ est fini de cardinal $q - p + 1$.

Il suffit de prendre pour φ , l'injection canonique :

$$i : \llbracket 1; q - p + 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket p; q \rrbracket$$

$$i \mapsto p - 1 + i$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{U}_n , l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

L'application $i : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \mathcal{U}_n$ est bijective, donc \mathcal{U}_n est fini et $\text{card}(\mathcal{U}_n) = n$.

$$k \mapsto e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

- Si \mathbb{F} est un sous-ensemble d'un ensemble fini \mathbb{E} et si $\mathbb{1}_{\mathbb{F}}$ est sa fonction caractéristique, on a :

$$\text{card}(\mathbb{F}) = \sum_{x \in \mathbb{E}} \mathbb{1}_{\mathbb{F}}(x). \quad (\text{XXII.1})$$

Proposition 1 (Cas particulier d'un sous-ensemble) : Soient \mathbb{E} un ensemble fini et \mathbb{F} une partie de \mathbb{E} .

Alors :

- \mathbb{F} est finie, et $\text{card}(\mathbb{F}) \leq \text{card}(\mathbb{E})$.
- De plus, si $\text{card}(\mathbb{F}) = \text{card}(\mathbb{E})$ alors $\mathbb{F} = \mathbb{E}$.

Remarques : Si \mathbb{E} et \mathbb{F} sont deux ensembles de même cardinaux, il suffit de montrer une inclusion pour avoir l'égalité.

Preuve : D'après (XXII.1), il suffit d'écrire :

$$\text{card}(\mathbb{F}) = \sum_{x \in \mathbb{E}} \mathbb{1}_{\mathbb{F}}(x) \leq \sum_{x \in \mathbb{E}} \mathbb{1}_{\mathbb{E}}(x) = \text{card}(\mathbb{E}).$$

I.2 Ensembles finis et applications

Théorème 2 (Effet d'une application sur le cardinal) : Soient \mathbb{E} et \mathbb{F} deux ensembles et $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ une application.

1 Si f est bijective, alors :

$$\mathbb{E} \text{ est fini de cardinal } n \iff \mathbb{F} \text{ est fini de cardinal } n \text{ et on a } \text{card}(\mathbb{E}) = \text{card}(\mathbb{F})$$

2 Si f est injective, alors :

$$\mathbb{F} \text{ est fini} \implies \mathbb{E} \text{ est fini et } \text{card}(\mathbb{E}) \leq \text{card}(\mathbb{F}).$$

3 Si f est surjective, alors :

$$\mathbb{E} \text{ est fini} \implies \mathbb{F} \text{ est fini et } \text{card}(\mathbb{F}) \leq \text{card}(\mathbb{E}).$$

Preuve :

1 Supposons \mathbb{E} fini de cardinal n . Il existe donc une application $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \mapsto \mathbb{E}$ bijective.

Alors $f \circ \varphi$ est bijective de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans \mathbb{F} , donc \mathbb{F} est fini de cardinal n .

On montre de même que si \mathbb{F} est fini de cardinal n alors \mathbb{E} est fini de cardinal n en utilisant $f^{-1} : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{E}$.

2 Supposons \mathbb{F} fini et posons $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow f(\mathbb{E})$ la corestriction de f à $\text{Im } f$. φ est toujours

$$x \mapsto f(x)$$

injective car f l'est et surjective, donc bijective.

Comme $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{F}$, $f(\mathbb{E})$ est fini de cardinal plus petit que celui de \mathbb{F} .

Ainsi, $\text{card}(\mathbb{E}) = \text{card}(f(\mathbb{E})) \leq \text{card}(\mathbb{F})$.

3 Supposons qu'il existe $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ surjective.

Montrons alors qu'il existe $\varphi : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{E}$ injective i.e. on sera alors ramené au deuxième point.

Pour tout $a \in \mathbb{F}$, notons $x_a \in \mathbb{E}$ un antécédent de a par f qui existe bien car f est surjective i.e. $f(x_a) = a$.

Considérons alors $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ et montrons que φ est injective :

$$a \mapsto x_a$$

Soient $(a; b) \in \mathbb{F}^2$ tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$. On a donc $x_a = x_b$.

Or, $f(x_a) = a$ et $f(x_b) = b$ par définition de x_a et x_b .

Ainsi $a = b$ et φ est injective.

On conclut alors avec le premier point puisque \mathbb{E} est fini.

— Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f , \mathbb{E} couvre \mathbb{F} en totalité.

Une telle couverture n'est possible que si \mathbb{E} est « plus gros » que \mathbb{F} i.e. si

$$\text{card}(\mathbb{F}) \leq \text{card}(\mathbb{E}) \quad - \text{assertion (3)}.$$

— Dire que f est injective, c'est dire que deux points distincts de \mathbb{E} sont envoyés par f sur deux points distincts de \mathbb{F} , i.e. que $f(\mathbb{E})$ est comme une copie de \mathbb{E} dans \mathbb{F} .

Une telle copie n'est possible que si \mathbb{F} est « plus gros » que \mathbb{E} i.e. si :

$$\text{card}(\mathbb{E}) \leq \text{card}(\mathbb{F}) \quad - \text{assertion (2)}.$$

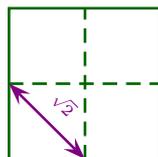
— Conséquence, une application d'un ensemble fini dans un autre dont le cardinal est strictement inférieur au premier, ne peut pas être injective : il existe donc nécessairement deux éléments qui ont la même image.

C'est ce que l'on appelle familièrement le « principe des tiroirs de Dirichlet » :

Si on range p chaussettes dans n tiroirs et que $n < p$, il existe au moins deux chaussettes qui sont dans le même tiroir.

Exercice 1 : Étant donnés 5 points dans un carré d'arête 2, montrer qu'on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.

Correction : Coupons simplement notre carré en quatre comme indiqué ci-dessous et prenons les quatre sous-carrés ainsi formés pour « tiroirs ».



Sommés de ranger 5 « chaussettes » - les 5 points quelconques - dans 4 tiroirs, les sous-carrés, nous sommes forcés d'en ranger 2 dans le même tiroir d'après le principe des tiroirs.

Au pire, ces points sont alors distants de $\sqrt{2}$, longueur de la diagonale de chaque sous-carré.

Théorème 3 : Soient \mathbb{E} et \mathbb{F} deux ensembles de même cardinal n et une application $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$.

On alors les équivalences suivantes :

- (i) f est bijective. (ii) f est injective. (iii) f est surjective.

Preuve :

(i) \implies (ii) et (iii) : Si f est bijective, alors f est injective et surjective. Easy!

(ii) \implies (i) : Supposons f injective. L'application f réalise une bijection de \mathbb{E} sur $f(\mathbb{E})$.

On en déduit que $\text{card}(\mathbb{E}) = \text{card}(f(\mathbb{E}))$.

$f(\mathbb{E})$ est donc une partie à n éléments de \mathbb{F} à n éléments donc $f(\mathbb{E}) = \mathbb{F}$ et f est surjective donc bijective.

(iii) \implies (i) : Supposons f surjective.

On construit alors comme précédemment une application $g : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{E}$ injective telle que $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{F}}$ en choisissant pour chaque élément $y \in \mathbb{F}$ un antécédent $g(y) \in \mathbb{E}$ par f .

En appliquant le point précédent, on en déduit que g est bijective.

D'où, f bijective puisque $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{F}}$.

I.3 Opérations sur les ensembles et cardinaux

Proposition 4 (Cardinal d'une réunion, d'une différence) : Soient \mathbb{E}, \mathbb{F} deux ensembles finis. Alors $\mathbb{E} \cup \mathbb{F}$ est un ensemble fini et on a :

Réunion : $\text{card}(\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) = \text{card}(\mathbb{E}) + \text{card}(\mathbb{F}) - \text{card}(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$.

En particulier, si \mathbb{E} et \mathbb{F} sont disjoints, on a :

$$\text{card}(\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) = \text{card}(\mathbb{E}) + \text{card}(\mathbb{F}).$$

Différence : $\text{card}(\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}) = \text{card}(\mathbb{E}) - \text{card}(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$.

En particulier, si $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$, $\text{card}(\overline{\mathbb{F}}) = \text{card}(\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}) = \text{card}(\mathbb{E}) - \text{card}(\mathbb{F})$.

Preuve : Il suffit de se rappeler que

$$\mathbf{1}_{\mathbb{E} \cup \mathbb{F}} = \mathbf{1}_{\mathbb{E}} + \mathbf{1}_{\mathbb{F}} - \mathbf{1}_{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}},$$

et d'utiliser la relation (XXII.1).

Le cas où \mathbb{E} et \mathbb{F} sont disjoints est trivial.

Lorsque les ensembles A_1, \dots, A_n sont disjoints de même cardinal, la formule :

$$\text{card} \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card} (A_i),$$

porte le joli nom de *principe des bergers* en référence au berger désireux de compter le nombre de ses moutons en ne pouvant compter que leurs pattes.

Théorème 5 (Principe des bergers) : Toute réunion DISJOINTE de n ensembles de même cardinal p est un ensemble de cardinal np .

Tout ça pour dire qu'un berger qui possède n moutons possède aussi $4n$ pattes de moutons !

Le principe des bergers est sans doute le principe que nous utiliserons le plus dans ce chapitre. Comment l'utiliserons-nous ? Quand un problème de dénombrement a été décomposé intellectuellement en deux sous-problèmes « étape 1 » et « étape 2 » avec n choix possibles pour l'étape 1 et p choix possibles POUR CHACUN DE CES CHOIX dans l'étape 2, alors le problème initial permet un total de np choix d'après le principe des bergers.

Exemple 3 : Nous avons utilisé le principe des bergers sans le dire quand nous avons calculé $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

Un tableau de taille $n \times p$ contient n lignes et chaque ligne contient p cases, donc un tel tableau contient np cases !

Exercice 2 : À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Correction : Pour la première lettre, on peut choisir n'importe quelle lettre de l'alphabet (p possibilités), mais pour chacune des suivantes, on n'a plus que $p - 1$ choix possibles si on veut éviter que deux lettres consécutives soient identiques.

D'où, un total de $p(p - 1)^{n-1}$ mots.

Proposition 6 (Cardinal d'un produit) : Soient \mathbb{E}, \mathbb{F} deux ensembles finis. Alors $\mathbb{E} \times \mathbb{F} = \{ (x; y), x \in \mathbb{E} \text{ et } y \in \mathbb{F} \}$ est fini et on a :

$$\text{card} (\mathbb{E} \times \mathbb{F}) = \text{card} (\mathbb{E}) \times \text{card} (\mathbb{F}).$$

Preuve : Notons $\mathbb{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathbb{F} = \{f_1, \dots, f_p\}$. Le produit cartésien $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ peut être vu comme la partition :

$$\mathbb{E} \times \mathbb{F} = \bigsqcup_{i=1}^n \left(\underbrace{\{e_i\} \times \mathbb{F}}_{\simeq \mathbb{F}} \right).$$

$$\text{d'où } \text{card} (\mathbb{E} \times \mathbb{F}) = \sum_{i=1}^n \text{card} (\mathbb{F}) = n \times \text{card} (\mathbb{F}) = \text{card} (\mathbb{E}) \times \text{card} (\mathbb{F}).$$

Cette proposition se généralise immédiatement par récurrence :

Corollaire 61 : Si E_1, \dots, E_p sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini et

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p).$$

En particulier si E est un ensemble fini, E^p est fini de cardinal $(\text{card}(E))^p$, $p \geq 1$.

II DÉNOMBREMENTS

Il y a trois sortes de gens :

- 1 ceux qui savent compter et
- 2 ceux qui ne savent pas !

II.1 Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS ^[1] » possède-t-il ?
- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?
- Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1 ; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$?
- Combien un ensemble fini de cardinal n possède-t-il de parties ?

Chacune de ces questions requiert, certes, un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens. Soyez dans ce chapitre plus encore que dans les autres ce que je vous demande souvent d'être - DES GENS CONCRETS !

Pour savoir de combien de façons on peut asseoir n personnes sur un banc rectiligne, imaginez-vous concrètement en train d'asseoir ces personnes et demandez-vous combien de choix cela vous laisse. Notre règle d'or dans ce chapitre sera ainsi la suivante :

COMPTER, C'EST ENUMERER/CONSTRUIRE.

Énumérer, c'est ordonner selon un principe de classement RÉFLÉCHI.

Exemple 4 : Pour énumérer les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on les lit généralement en colonnes de gauche à droite et du haut vers le bas - ce choix est bien sûr tout à fait conventionnel !

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}, a_{n1}, \dots, a_{np}.$$

Exemple 5 : Combien l'ensemble $\llbracket 1 ; 4 \rrbracket$ a-t-il de parties ?

La réponse est 16.

[1]. Les Bororos sont un peuple amérindien présent dans l'État du Mato Grosso (Brésil).

Énumération lexicographique en fonction du cardinal : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$.

Énumération lexicographique après représentation par des mots : On peut associer bijectivement à toute partie A de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ un et un seul mot de 4 lettres sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

De quelle manière? La première lettre de ce mot est un « 1 » si $1 \in A$ et un « 0 » sinon, la deuxième lettre est un « 1 » si $2 \in A$ et un « 0 » sinon, ...

Par exemple, \emptyset est représenté par 0000, $\{2\}$ par 0100, $\{2, 3\}$ par 0110 et $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ par 1111.

Ainsi représentées, les parties de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ sont faciles à énumérer lexicographiquement :

0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110, 0001,
1001, 0101, 1101, 0011, 1011, 0111, 1111.

II.2 Listes et Arrangements

Définition 3 (*p*-liste) : Soit E un ensemble fini.

On appelle *p-liste* de E tout *p*-uplet d'éléments de E , c'est à dire un élément de $E^p = E \times E \times \dots \times E$.

ATTENTION | L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.

Proposition 7 (Nombre de *p*-listes) : Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de *p*-listes (ou *p*-uplets) de E est égal à n^p .

Dans une liste, l'ordre des éléments compte car une liste n'est jamais qu'une FAMILLE - et non pas un ensemble - et un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.

Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages SUCCESSIFS AVEC REMISE - avec remise car les répétitions sont autorisées.

Preuve : Cela découle de $\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p$.

Exercice 3 : De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Correction : 52^5 .

Définition 4 (*p*-arrangement) : Soit E un ensemble fini.

On appelle *p-arrangement* de E toute *p*-liste de E d'éléments *distincts*.

Proposition 8 : Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de *p*-arrangements de E est égal à :

$$n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ si } p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages SUCCESSIFS SANS REMISE - sans remise car les répétitions sont interdites.

Preuve : En effet, pour composer un tel p -uplet (e_1, e_2, \dots, e_p) , on a n choix possibles pour la première composante $e_1 \in \mathbb{E}$, $n - 1$ choix possibles pour la deuxième composante $e_2 \in \mathbb{E} \setminus \{e_1\}$, ..., $n - p + 1$ choix possibles pour la dernière composante $e_p \in \mathbb{E} \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_{p-1}\}$.

Finalement, $n(n - 1) \dots (n - p + 1)$ p -uplets d'éléments distincts de \mathbb{E} .

Exemples 6 :

- Il y a $\frac{40!}{35!}$ possibilités de tirer 5 boules numérotées entre 1 et 40 (en tenant compte de l'ordre).
- Une course de chevaux comporte 20 partants. Le nombre de résultats possibles de tiercés dans l'ordre est $20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Exercice 4 : De combien de façons peut-on asseoir n personnes :

- 1 sur un banc rectiligne ?
- 2 autour d'une table ronde ?

Correction :

Banc rectiligne : On peut considérer que les personnes à asseoir sont numérotées de 1 à n .

Les asseoir sur un banc rectiligne revient donc à les énumérer toutes dans un ordre quelconque i.e. à se donner un n -arrangement quelconque de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

D'où un total de $n!$ configurations possibles.

Table ronde : La différence entre un banc rectiligne et une table ronde, c'est qu'il n'y a pas de première place autour d'une table ronde. Par exemple, on ne change pas la configuration des places assises quand on demande à chaque convive de se déplacer d'une place sur sa droite.

Pour asseoir n personnes autour d'une table ronde :

- on peut ainsi commencer par asseoir arbitrairement la personne numérotée n ,
- puis lui donner des voisins de proche en proche par la droite en se donnant un $(n - 1)$ -arrangement quelconque de $\llbracket 1; n - 1 \rrbracket$.

D'où un total de $(n - 1)!$ configurations possibles.

II.3 Nombre d'applications et combinaisons

Théorème 9 (Nombres d'applications de \mathbb{E} dans \mathbb{F}) : Soient \mathbb{E}_p et \mathbb{F}_n deux ensembles finis de cardinal respectif p et n .

Alors, l'ensemble des applications de \mathbb{E} dans \mathbb{F} , noté $\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$, est fini et on a :

$$\text{card}(\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})) = \text{card}(\mathbb{F})^{\text{card}(\mathbb{E})} = n^p.$$

Remarques :

- Une p -liste de \mathbb{E} n'est jamais qu'une application de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans \mathbb{E} .
- Réciproquement, la donnée d'une application f de $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ dans \mathbb{F} est équivalente à la donnée de la p -liste $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ de \mathbb{F} .

Preuve : Notons e_1, e_2, \dots, e_p les p éléments de l'ensemble \mathbb{E} . On considère l'application φ de $\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$ dans \mathbb{F}^p définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F}^p \\ f &\longmapsto (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)). \end{aligned}$$

Tout p -uplet (f_1, f_2, \dots, f_p) admet pour unique antécédent par φ l'application $f \in \mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$ définie par $f(e_i) = f_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$.

Ainsi φ est bijective i.e. les ensembles $\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$ et \mathbb{F}^p sont équipotents.

Ils ont donc même cardinal :

$$\text{card}(\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})) = \text{card}(\mathbb{F}^p) = n^p.$$

Théorème 10 (Ensemble des parties) : Soit \mathbb{E} un ensemble fini de cardinal n , et $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ l'ensemble des parties de \mathbb{E} .

$$\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{E})) = 2^n.$$

Remarque : On verra une autre démonstration de ce résultat plus loin.

Preuve : L'application $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{E}; \{0; 1\})$ est une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{E}; \{0; 1\})$.

$$A \subset \mathbb{E} \longmapsto \mathbf{1}_A$$

Proposition 11 : Soient \mathbb{E}_p et \mathbb{F}_n deux ensembles finis de cardinal respectif p et n .

Le nombre d'injections \mathbb{E} dans \mathbb{F} est $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

Preuve : On a vu que l'application $\varphi : \mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}^p$ est bijective.

$$f \longmapsto (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$$

Il est clair que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$ est injective si, et seulement si $\varphi(f)$ est une p -liste d'éléments distincts de \mathbb{F} .

Ainsi l'application φ se restreint en une bijection de l'ensemble des applications injectives de \mathbb{E} dans \mathbb{F} sur l'ensemble des p -listes d'éléments distincts de \mathbb{F} , dont on connaît le cardinal grâce à la **proposition (8)**.

Définition 5 ($\mathcal{S}(\mathbb{E})$) : Soit \mathbb{E} un ensemble fini de cardinal n .

On appelle groupe des permutations de \mathbb{E} , noté $\mathcal{S}(\mathbb{E})$, l'ensemble des bijections de \mathbb{E} .

Proposition 12 : Soit \mathbb{E} un ensemble fini de cardinal n .

$$\mathcal{S}(\mathbb{E}) \text{ est fini et } \text{card}(\mathcal{S}(\mathbb{E})) = n!.$$

Preuve : D'après les propositions précédentes, les permutations de \mathbb{E} sont en fait les injections de \mathbb{E} dans \mathbb{E} et il y en a $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

Exercice 5 : Soit $n \geq 3$. Combien y a-t-il de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 3 ?

Correction : Pour construire une telle permutation, on peut choisir l'image de 3, $n-2$ possibilités, puis celle de 4, $n-3$ possibilités, ...et enfin celle de n , 1 possibilité.

D'où un total de $(n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1 = (n-2)!$ permutations.

II.4 Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Définition 6 (p -combinaison) : Soit \mathbb{E} un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p -combinaison de \mathbb{E} toute partie de \mathbb{E} à p éléments.

On note $\mathcal{P}_p(\mathbb{E})$ leur ensemble.

Dans une combinaison, qui est un ENSEMBLE et non une famille, les éléments sont donnés sans ordre.

Quand on décide de numéroter les éléments d'une combinaison, le choix de la numérotation est totalement arbitraire, la combinaison en tant que telle n'a pas un premier élément, un deuxième élément, etc.

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages SIMULTANÉS.

Théorème 13 (Nombre de combinaisons) : Soient \mathbb{E} un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de parties de \mathbb{E} de cardinal p (ou p -combinaisons de \mathbb{E}) est $\binom{n}{p}$:

$$\text{card}(\mathcal{P}_p(\mathbb{E})) = \binom{n}{p}.$$

Preuve : L'idée de la démonstration, comme toujours, est de se ramener à un ensemble dont on connaît le cardinal.

Considérons donc $\mathcal{A}(n; p)$ l'ensemble des p -listes d'éléments distincts de \mathbb{E} .

Pour construire un p -uplet d'éléments de \mathbb{E} deux à deux distincts, on a :

- $\text{card}(\mathcal{P}_p(\mathbb{E}))$ choix pour l'ensemble des éléments du p -uplet;
- $p!$ choix pour ordonner cet ensemble.

Ainsi, on a $p! \text{card}(\mathcal{P}_p(\mathbb{E})) = \text{card}(\mathcal{A}(n; p)) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Donc $\text{card}(\mathcal{P}_p(\mathbb{E})) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$.

Exercice 6 : De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Correction : $\binom{52}{5}$.

Corollaire 131 (k -listes strictement croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$) : Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe

$\binom{n}{k}$ familles d'entiers (i_1, i_2, \dots, i_k) telles que :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Preuve : Choisir une famille d'entiers pour laquelle $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ revient à choisir simplement une k -combinaison de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $\binom{n}{k}$ possibilités car il n'y a ensuite qu'une seule manière d'en ranger les éléments dans l'ordre croissant.

Exercice 7 : On appelle anagramme d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres avec multiplicité, mais dans un ordre quelconque.

Les mots « NOSSMOI » et « SIONSOM » sont par exemple deux anagrammes du mot « MOISSON ».

Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?

Correction : On s'intéresse à l'ensemble des mots de 7 lettres qu'on peut former avec 3 « O », 2 « R », 1 « B » et 1 « S ». Pour construire un tel mot quelconque, on peut choisir :

- d'abord la position des « O », $\binom{7}{3} = 35$ possibilités,
- puis la position des « R », $\binom{7-3}{2} = 6$ possibilités,

- puis la position du « B », $\binom{2}{1} = 2$ possibilités,
- et enfin la position du « P », $\binom{1}{1} = 1$ possibilité.

D'où un total de $35 \times 6 \times 2 \times 1 = 420$ anagrammes possibles.

Remarque : On aurait pu choisir la position des lettres dans un ordre différent.

Par exemple, d'abord le « P », puis les « R », puis le « B », puis les « O ». On obtient, bien sûr, le même résultat, mais présenté différemment :

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} = 7 \times 15 \times 4 \times 1 = 420 \text{ anagrammes possibles.}$$

III RETOUR SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

III.1 Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

- Pour les p -listes d'éléments distincts, soit les p -arrangements, on tient compte de l'ordre.
- Pour les parties à p éléments, soit les p -combinaisons, aucun ordre pris en compte.

On utilise donc les combinaisons dans tous les problèmes de choix simultanés de p éléments distincts parmi n , sans considération d'ordre et sans répétition.

Exemple 7 : Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er} groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.
- Une fois le premier groupe de colles réalisé, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants pour former le 2^{ème} groupe : il y a $\binom{45}{3}$ choix.
- Ainsi de suite, ...
- On compose le 16^{ème} groupe : $\binom{3}{3}$ choix.

On a ainsi :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times \dots \times \binom{3}{3} = \prod_{i=1}^{16} \binom{3i}{3} = \prod_{i=1}^{16} \frac{(3i)!}{(3(i-1))!3!} = \frac{48!}{1! (3!)^{16}} = \frac{48!}{6^{16}} \text{ choix.}$$

Mais on a construit des 16-arrangements de groupes de colles : $(G_1, G_2, \dots, G_{16})$ alors que ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{G_1, G_2, \dots, G_{16}\}$ de 16 groupes, sans ordre.

Il faut donc diviser par $16!$, nombre de façons de permuter G_1, G_2, \dots, G_{16} .

On obtient finalement $\frac{48!}{6^{16} \times 16!}$ choix.

III.2 Coefficients binomiaux

L'objectif de ce paragraphe est de redémontrer de manière combinatoire les résultats connus sur les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$:

Rappel 1 : Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

1 **Symétrie** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2 **Formule du capitaine** : Pour tout n, k de \mathbb{N}^* : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

3 **Formule de Pascal** : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

4 **Intégralité** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Preuve :

Symétrie : On veut montrer cette égalité sans calcul par un raisonnement combinatoire. L'idée est simple, pour se donner une p -combinaison \mathcal{X} de $\llbracket 1; n \rrbracket$ i.e. $\binom{n}{p}$ possibilités, on peut se donner son complémentaire $\overline{\mathcal{X}}$ qui est une $(n-p)$ -combinaison de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\binom{n}{n-p}$ possibilités, et retrouver \mathcal{X} grâce à la relation $\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}$.

Formellement, nous sommes juste en train d'affirmer que l'application $\mathcal{X} \mapsto \overline{\mathcal{X}}$ est une bijection de $\mathcal{P}_p(\llbracket 1; n \rrbracket)$ sur $\mathcal{P}_{n-p}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ bijective car de réciproque « elle-même » mais avec inversion des ensembles de départ et d'arrivée.

Ainsi, comme voulu : $\text{card}(\mathcal{P}_p(\llbracket 1; n \rrbracket)) = \text{card}(\mathcal{P}_{n-p}(\llbracket 1; n \rrbracket))$.

Formule du capitaine : De combien de manières peut-on former à partir n personnes une équipe de p d'entre elles dont un capitaine ? On va dénombrer ces équipes de deux manières, ce dont découlera aussitôt le résultat.

- On peut commencer par choisir les p membres de l'équipe, $\binom{n}{p}$ possibilités, puis désigner le capitaine après coup parmi eux, p possibilités.
- Mais on peut procéder autrement et commencer par choisir le capitaine, n possibilités, puis compléter son équipe en choisissant les $p-1$ autres membres de l'équipe $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

Formule de Pascal : Notons \mathbb{E}_{n+1} un ensemble fini de cardinal $n + 1$, que l'on écrit :

$$\mathbb{E}_{n+1} = \{e_{n+1}\} \cup \mathbb{E}_n,$$

avec \mathbb{E}_n le complémentaire de $\{e_{n+1}\}$ dans \mathbb{E}_{n+1} .

En particulier, $\text{card}(\mathbb{E}_n) = n$.

Soit A une partie de \mathbb{E}_{n+1} à $k + 1$ éléments. On a alors deux cas possibles :

- A contient l'élément e_{n+1} . Dans ce cas A est de la forme $A = F_n \cup \{e_{n+1}\}$ avec F_n une partie de \mathbb{E}_n à k éléments.

On a autant de telles parties que de parties F_n de \mathbb{E}_n à k éléments i.e. $\binom{n}{k}$.

- A ne contient pas l'élément $\{e_{n+1}\}$. Dans ce cas, une telle partie est de la forme $A = F_n$ avec F_n une partie de \mathbb{E}_n à $k + 1$ éléments.

On a autant de telles parties que de parties F_n de \mathbb{E}_n à $k + 1$ éléments i.e. $\binom{n}{k+1}$.

On en déduit l'égalité souhaitée : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Intégralité : En termes combinatoire et d'après le **théorème (13)**, il est particulièrement évident

de voir que $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Soient n , N et M trois entiers tels que $n \leq N + M$.

Montrer la formule, dite de Vandermonde, $\sum_{k=0}^n \binom{N}{k} \binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$.

Correction : Considérons que nous avons N roses et M tulipes toutes différentes. Combien de bouquets de n fleurs peut-on réaliser ? Réponse : $\binom{N+M}{n}$.

On peut aussi composer des bouquets de k roses complétées par $n - k$ tulipes. Il y en a $\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, soit $\sum_{k=0}^n \binom{N}{k} \binom{M}{n-k}$.

Proposition 14 (Formule du binôme de Newton) : Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve : Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times \dots \times (a + b)}_{n \text{ fois}}.$$

Développer tout ce produit revient à choisir dans chaque facteur l'élément a ou l'élément b .

Si on choisit k fois l'élément a ($0 \leq k \leq n$), on a donc pris $n - k$ fois l'élément b pour obtenir l'élément $a^k b^{n-k}$.

Reste à déterminer son coefficient : il s'agit du nombre d'occurrences de $a^k b^{n-k}$ après avoir tout développé.

Or, ce nombre est précisément $\binom{n}{k}$, puisqu'il revient à choisir k fois l'élément a parmi les n facteurs du produit.

$$\text{Finalement : } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Proposition 15 : Si E est un ensemble fini à n éléments, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini de cardinal 2^n :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Preuve : En effet, $\mathcal{P}(E)$ est l'union disjointe des sous-ensembles $\mathcal{P}_k(E)$ des parties de E à k éléments, avec $0 \leq k \leq n$.

Chacun de ces sous-ensembles est bien fini de cardinal $\binom{n}{k}$.

On en déduit que $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Exercice 9 (Application aux problèmes de rangement avec ou sans répétition) :

Déterminer le nombre de façons de ranger p objets dans n boîtes numérotées de 1 à n :

- 1 sans répétition.
- 2 avec répétition.

Correction :

- 1 **Rangement sans répétition (chaque boîte contient au plus un objet) :**

Le problème peut se modéliser par une suite de n symboles 0 ou 1 telle que le $i^{\text{ème}}$ symbole vaut 1 si il y a un objet dans la $i^{\text{ème}}$ boîte, et 0 sinon.

Par exemple, la suite 1101000... indique que les boîtes 1 et 2 contiennent un objet, la boîte 3 est vide,

...

Une telle suite est complètement déterminée par la partie à p éléments qui contient les 1.

Il y a donc $\binom{n}{p}$ rangements sans répétition de p objets dans n boîtes.

2 *Rangement avec répétition (chaque boîte contient plusieurs objets) :*

Le problème peut se modéliser par une suite de $n + p - 1$ symboles 1 ou \bullet dont p sont des 1 (ils représentent les objets) et $n - 1$ sont des \bullet (ils représentent les $n - 1$ séparations entre les n boîtes).

Par exemple, la suite $11\bullet 1\bullet\bullet 111\bullet\dots$ indique que la boîte 1 contient deux objets, la 2 contient 1 objet, la boîte 3 est vide, ...

Une telle suite est complètement déterminée par la partie à p éléments qui contient les 1.

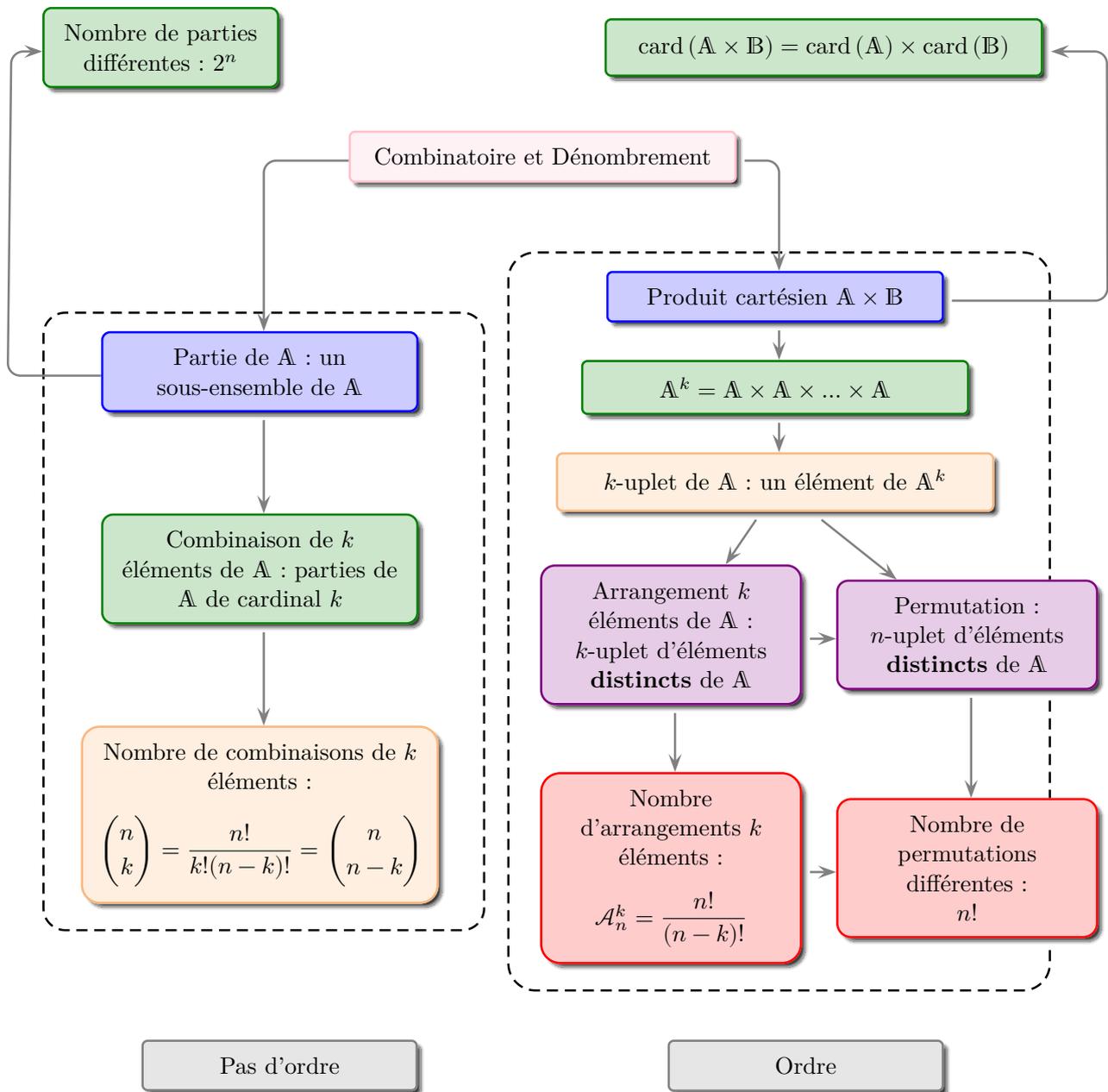
Il y a donc $\binom{n+p-1}{p}$ rangements avec répétition de p objets dans n boîtes.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Les mathématiciens ont ajouté des points d'exclamation à leurs formules pour faire croire qu'elles sont excitantes !

III.3 Bilan pratique

Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.



En pratique, un problème de dénombrement peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Tirages successifs **AVEC** remise
= Uplets

Tirages successifs **SANS** remise
= Arrangements

Tirages **SIMULTANÉS**
= Combinaisons

Index

- Arrangement, 8
- Bijection
 - avec \mathbb{N} , 2
- Binome de Newton, 15
- Cardinal, 2
 - d'un produit, 6
 - d'une différence, 5
 - d'une réunion, 5
- Coefficients binomiaux
 - Propriétés des, 14
- Combinaison, 11
- Dirichlet, 4
- Ensemble
 - Cardinal d', 2
 - des parties, 10
 - fini, 2
- Groupe
 - des permutations, 11
- Newton
 - Binôme de, 15
- Nombre
 - d'applications, 9
 - d'injections, 10
 - de p -listes, 8
 - de combinaisons, 9, 11
 - de parties d'un ensemble, 11
 - des parties, 10
- p
 - arrangement, 8
 - combinaison, 11
 - liste, 8
 - uplet, 8
- Pascal, 14
- Principe
 - des bergers, 6
 - des tiroirs, 4
- Produit
 - cartésien, 6
- Réunion
 - Cardinal d'une, 5
- $\mathcal{S}(\mathbb{E})$, 11
- Tirage
 - simultané, 11
 - successif
 - avec remise, 8
 - sans remise, 9