Dénombrements

Exercice 1 : Montrer que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) =& \mathrm{Card}\,\mathrm{A}+\mathrm{Card}\,\mathrm{B}+\mathrm{Card}\,\mathrm{C}\\ &-\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})-\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\\ &+\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\end{aligned}$$

Exercice 2 : Dans une classe de 30 élèves, la LV1 est obligatoire (anglais ou allemand) et une LV2 est facultative (anglais, allemand ou espagnol). On sait qu'il y a :

— 3 élèves qui font anglais en LV1 et pas de LV2 ;
— 28 élèves qui font anglais en LV1 ou en LV2 ;
— 20 élèves qui font allemand en LV1 ou en LV2 ;
— 4 élèves qui ne font pas de LV2.
— il y a deux fois plus d'élèves qui font anglais en LV1 et allemand en LV2 que d'élèves qui font allemand en LV1 et anglais en LV2.

Déterminer le nombre d'élèves faisant chaque LV1, et chaque LV2.

Exercice 3 :

1. Dénombrer les $(x, y) \in \{1, 2, \cdots 10\}^2$ tels que 2 divise x ou 3 divise y.
2. Dénombrer l'ensemble des entiers n entre 1 et 100 tels que 2 divise n ou 3 divise n.

Exercice 4 : En notant que :

— Une personne a au plus 100 000 cheveux,
— Nouméa compte 139 000 habitants,

Montrer que deux Nouméens au moins ont exactement le même nombre de cheveux.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le principe des tiroirs, montrer que si $\mathbb{E}$ est un sous-ensemble de $[0\,;1[$ de cardinal $n+1$, alors il existe $(a\,;b) \in \mathbb{E}^2$ avec $a \neq b$ tel que $|a-b| < \dfrac{1}{n}$.

Exercice 6 : Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire toutes successivement sans remise.

Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

Exercice 7 : Combien de mots de p lettres (ayant un sens ou non) peut-on former avec un alphabet de n lettres ?

Exercice 8 : Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot « OUPS » ? - par exemple, « BOUPSAR » et « QIOUPSI ».

Exercice 9 : De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Exercice 10 : Comme le sait tout bon élève de prépa, un jeu de tarot contient 78 cartes : 21 atouts, la carte qu'on appelle l'« excuse » et 14 cartes de chacune des 4 couleurs cœur, pique, trèfle et carreau.

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant :

1. 2 atouts et 4 trèfles ?
2. exactement un atout et au moins 3 as ?

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dénombrer les couples (x, y) de $\{1, \cdots, n\}^2$ tels que :

1. $x \neq y$
2. $x \leqslant y$
3. $x < y$
4. $x + y = n$
5. $x + y \leqslant n$

Exercice 12 : Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. Combien y a-t-il de résultats possibles dans les cas suivants :

1. on tire successivement et avec remise trois boules de l'urne ;
2. on tire successivement et sans remise trois boules de l'urne ;
3. on tire une poignée de trois boules de l'urne.

Exercice 13 : Déterminer le nombre d'anagrammes de chacun des mots :

PIE, LAPIN, CHEVRE, HIPPOPOTAME.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$ donné.

1. Déterminer le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b + c = n$.
2. Déterminer le nombre de triplets $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $a + b + c = n$.

Exercice 15 : On compte dans cet exercice les mots des trois lettres choisies parmi les 26 lettres de l'alphabet, avec ou sans signification. Déterminer le nombre de mots de trois lettres :

1. en tout ;
2. deux à deux distinctes ;
3. ayant exactement deux lettres identiques ;
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;
5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne ;
6. contenant deux consonnes identiques et une voyelle ;
7. contenant au moins une consonne ;
8. contenant au moins une consonne et une voyelle.

Exercice 16 : On dispose de trois urnes notées $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et de six boules. On répartit les six boules dans les trois urnes, chaque urne pouvant contenir de 0 à 6 boules. Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$. Déterminer le nombre de répartitions :

1. en tout ;
2. telles que l'urne A soit vide ;
3. telles que l'urne A soit vide et soit la seule urne vide ;
4. telles qu'une urne soit vide, et une seulement ;
5. telles qu'aucune urne ne soit vide ;
6. telles qu'au moins une urne soit vide ;

Exercice 17 :

1. Combien y a-t-il de façons de subdiviser une classe de 39 élèves en 15 groupes de 3 ?
2. Généraliser le résultat au nombre de partages de np objets en p groupes de n.

Exercice 18 : E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de relations binaires sur E ?
2. Combien sont réflexives ?
3. Combien sont symétriques ?
4. Combien sont antisymétriques ?
5. Combien sont réflexives et symétriques ?
6. Combien sont réflexives et antisymétriques ?

Exercice 19 : On se propose d'établir de deux manières différentes la formule dite de Vandermonde : quels que soient les entiers a, b, et n, on a : $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

1. Trouver une interprétation combinatoire, en travaillant avec deux ensembles finis disjoints A et B de cardinaux respectifs a et b, et en posant $\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
2. Démonstration algébrique :

   On considère le polynôme $(1+\mathrm{X})^{a+b} = (1+\mathrm{X})^a(1+\mathrm{X})^b$.

   Exprimer le coefficient en X^n de ce polynôme de deux manières différentes.

[0]. **Alexandre-Théophile Vandermonde,** mathématicien français, 1735-1796.