Analyse asymptotique

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 21

Sommaire I

- Calculs de limites
- Position locale d'une fonction par rapport à une tangente
- Développement asymptotique
- Asymptotes et limite en $+\infty$

Dans ce chapitre, on introduit certains outils permettant de mieux comprendre le comportement des suites ou fonctions au voisinage de l'infini (pour les suites), ou d'un point quelconque a de $\overline{\mathbb{R}}$ (pour les fonctions).

Ces outils permettent d'affiner la notion de limite, notamment dans le cas d'une limite nulle ou infinie : ils nous permettront d'exprimer le fait qu'une suite converge plus rapidement vers 0 qu'une autre, ou sensiblement à la même vitesse.

Nous affinerons ensuite l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point. L'étude des dérivées permet d'approcher localement une courbe par une droite (la tangente). Dans ce chapitre, nous généralisons ce point de vue en montrant comment les formules de Taylor permettent d'approcher une courbe au plus près (localement) par une courbe polynomiale de degré donné. Nous étudierons ensuite la qualité de cette approximation, en majorant (localement pour l'instant) l'erreur faite en approchant la courbe par cette courbe polynomiale.

Il s'agit du calcul des développements limités.

Dans ce chapitre, la lettre I qui servira d'ensemble de définition désignera une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Soient deux fonctions f, $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \bar{\mathrm{I}}$.

Nous supposerons ici que f et g sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a $\mathcal{V}(a) \setminus \{a\}$, ou qu'elles s'annulent toutes les deux en ce point.

Dans ce chapitre, la lettre I qui servira d'ensemble de définition désignera une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Soient deux fonctions f, $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \bar{\mathrm{I}}$.

Nous supposerons ici que f et g sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a $\mathcal{V}(a) \setminus \{a\}$, ou qu'elles s'annulent toutes les deux en ce point.

Dans la même idée, on considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Il s'agit ici de comparer les deux fonctions au voisinage de a ou les deux suites à partir d'un certain rang *i.e.* au voisinage de l'infini.

Pour cela, on forme leur rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ou $\dfrac{u_n}{v_n}$ et on regarde ce qu'il se passe lorsque $x \to a$ ou $n \to +\infty$ respectivement.

Il s'agit ici de comparer les deux fonctions au voisinage de a ou les deux suites à partir d'un certain rang *i.e.* au voisinage de l'infini.

Pour cela, on forme leur rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ou $\dfrac{u_n}{v_n}$ et on regarde ce qu'il se passe lorsque $x \to a$ ou $n \to +\infty$ respectivement.

Trois cas intéressants se présentent alors :

1. f est dominée par g.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il s'agit ici de comparer les deux fonctions au voisinage de a ou les deux suites à partir d'un certain rang *i.e.* au voisinage de l'infini.

Pour cela, on forme leur rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ou $\dfrac{u_n}{v_n}$ et on regarde ce qu'il se passe lorsque $x \to a$ ou $n \to +\infty$ respectivement.

Trois cas intéressants se présentent alors :

1. f est dominée par g.
2. f est négligeable devant g.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il s'agit ici de comparer les deux fonctions au voisinage de a ou les deux suites à partir d'un certain rang *i.e.* au voisinage de l'infini.

Pour cela, on forme leur rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ou $\dfrac{u_n}{v_n}$ et on regarde ce qu'il se passe lorsque $x \to a$ ou $n \to +\infty$ respectivement.

Trois cas intéressants se présentent alors :

1. f est dominée par g.
2. f est négligeable devant g.
3. f et g sont équivalentes.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

I. Négligeabilité

I. Négligeabilité

1. Introduction

Définition 1 (Négligeabilité) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$, si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et on lit :

« f est un petit o de g au voisinage de a ».

Définition I (Négligeabilité) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$, si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ et on lit :

« f est un petit o de g au voisinage de a ».

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et on lit :

« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un petit o de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini ».

Remarques :

- La définition de négligeabilité est, en fait, plus générale :
  On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \cap \mathcal{V}_a \longmapsto \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I} \cap \mathcal{V}_a$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques :

- La définition de négligeabilité est, en fait, plus générale :
  On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \cap \mathcal{V}_a \longmapsto \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I} \cap \mathcal{V}_a$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

  Cependant, dans la situation où nous nous sommes placés *i.e.* « g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$ », ces deux définitions sont alors équivalentes.

I. Négligeabilité
1. Introduction

- Dire qu'une fonction ou une suite est un $\mathrm{o}\,(1)$ au voisinage d'un point a ou de $+\infty$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{1} = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0$ *i.e.* un $\mathrm{o}\,(1)$ est une fonction ou une suite de limite nulle en a ou $+\infty$ respectivement.

Exemples 1 :

- $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(\mathrm{e}^x)$.

- Dire qu'une fonction ou une suite est un $\mathrm{o}(1)$ au voisinage d'un point a ou de $+\infty$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{1} = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0$ *i.e.* un $\mathrm{o}(1)$ est une fonction ou une suite de limite nulle en a ou $+\infty$ respectivement.

Exemples 1 :

- $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^x\right)$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^k}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$ et $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$.

- Dire qu'une fonction ou une suite est un $\mathrm{o}(1)$ au voisinage d'un point a ou de $+\infty$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{1} = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0$ *i.e.* un $\mathrm{o}(1)$ est une fonction ou une suite de limite nulle en a ou $+\infty$ respectivement.

Exemples 1 :

- $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^k}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$ et $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{o}\left(x^k\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(1)$.

- Dire qu'une fonction ou une suite est un $\mathrm{o}\,(1)$ au voisinage d'un point a ou de $+\infty$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{1} = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0$ *i.e.* un $\mathrm{o}\,(1)$ est une fonction ou une suite de limite nulle en a ou $+\infty$ respectivement.

Exemples 1 :

- $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(\mathrm{e}^x)$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^k}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(1)$ et $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(1)$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{o}\left(x^k\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\,(1)$.
- Soit $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x$ alors $f \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\,(1)$ et $f \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^6\right)$.

I. Négligeabilité
1. Introduction

- L'intérêt de cette notation est qu'on peut l'utiliser dans les calculs. On peut, par exemple, considérer $u_n = v_n + \mathrm{o}(w_n)$. C'est notamment pratique pour formaliser des approximations.
  Ainsi, dire que
  $$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
  signifie que pour n assez grand, u_n est à peu près égal à $2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{n^2}$, et que l'erreur faite en approchant u_n par cette expression est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$.
  Le terme $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ contrôle l'erreur et exprime que ce qu'il reste est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$ pour n assez grand. Il est donc inutile de l'écrire et on dira souvent que le reste est « absorbé » par le o.

I. Négligeabilité
1. Introduction

Exemples 2 :

- $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^4\right)$ et $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.

Exemples 2 :

- $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^4\right)$ et $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
- $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Exemples 2 :

- $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^4\right)$ et $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
- $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^4\right)$.

Exemples 2 :

- $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^4\right)$ et $x^4 \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
- $\dfrac{1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- $n^2 \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^4\right)$.
- $2^n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(3^n\right)$.

Exemples 2 :

- $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^4\right)$ et $x^4 \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
- $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^4\right)$.
- $2^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(3^n\right)$.
- $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Les petits o sont la formalisation définitive des croissances comparées.

« Certains infinis sont plus infinis que d'autres,
certains zéros sont plus zéros que d'autres. »

Les petits o sont la formalisation définitive des croissances comparées.

« Certains infinis sont plus infinis que d'autres,
certains zéros sont plus zéros que d'autres. »

Il suffit alors de relire les derniers chapitres pour débuter notre formulaire des relation de négligeabilité à connaître :

Théorème 1 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) :

Soient a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$.

I. Négligeabilité

1. Introduction

Les petits o sont la formalisation définitive des croissances comparées.

« Certains infinis sont plus infinis que d'autres,
certains zéros sont plus zéros que d'autres. »

Il suffit alors de relire les derniers chapitres pour débuter notre formulaire des relation de négligeabilité à connaître :

Théorème 1 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) :

Soient a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$.

I. Négligeabilité
1. Introduction

Les petits o sont la formalisation définitive des croissances comparées.

« Certains infinis sont plus infinis que d'autres,
certains zéros sont plus zéros que d'autres. »

Il suffit alors de relire les derniers chapitres pour débuter notre formulaire des relation de négligeabilité à connaître :

Théorème 1 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) :

Soient a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $(\ln x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$.
- Si $0 < a < b$ alors $a^x \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(b^x\right)$.

I. Négligeabilité
1. Introduction

Les petits o sont la formalisation définitive des croissances comparées.

> *« Certains infinis sont plus infinis que d'autres,*
> *certains zéros sont plus zéros que d'autres. »*

Il suffit alors de relire les derniers chapitres pour débuter notre formulaire des relation de négligeabilité à connaître :

Théorème 1 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) :

Soient a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$.
- Si $0 < a < b$ alors $a^x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(b^x\right)$.
- Si $a > 1$ alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(a^x\right)$.
  En particulier, si $\alpha > 0$, alors $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right)$.

Exemple 3 :

Si $\mathrm{P}(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots a_q x^q$ $(p \geqslant q)$ est une fonction polynomiale, alors :

$$\mathrm{P}(x) \underset{x \to +\infty}{=} a_p x^p + \mathrm{o}\left(x^p\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(x) \underset{x \to 0}{=} a_q x^q + \mathrm{o}\left(x^q\right).$$

De même, au voisinage de 0, on a :

Théorème 2 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de 0) :

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\beta \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$.

Exemple 3 :

Si $\mathrm{P}(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots a_q x^q$ $(p \geqslant q)$ est une fonction polynomiale, alors :

$$\mathrm{P}(x) \underset{x \to +\infty}{=} a_p x^p + \mathrm{o}\left(x^p\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(x) \underset{x \to 0}{=} a_q x^q + \mathrm{o}\left(x^q\right).$$

De même, au voisinage de 0, on a :

Théorème 2 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de 0) :

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\beta \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $x^\alpha \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left((\ln x)^\beta\right)$ ou $(\ln x)^\beta \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

Théorème 3 (Croissances comparées usuelles des suites) :

- Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites. Il suffit de remplacer x par n.

Théorème 3 (Croissances comparées usuelles des suites) :

- Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites. Il suffit de remplacer x par n.
- $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(n!)$.

Théorème 3 (Croissances comparées usuelles des suites) :

- Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites. Il suffit de remplacer x par n.
- $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(n!)$.

Nous avons introduit la notation petit o sous sa forme la plus élémentaire - mise en relation de deux fonctions ou de deux suites - mais on la rencontre en réalité le plus souvent sous la forme suivante :

$$f \underset{x\to a}{=} g + \mathrm{o}\,(g) \ \text{ pour les fonctions et } u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}\,(v_n) \ \text{ pour les suites.}$$

Ce qui est affirmé ici, c'est que $f = g + \varepsilon$ avec $\varepsilon \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ ou que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ *i.e.* que f est globalement égale à g modulo des termes négligeables devant g au voisinage de a ou devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$. Cette écriture sera à la base de la relation d'équivalence définie plus loin.

I. Négligeabilité
1. Introduction

Remarque : Partons de l'affirmation $\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \mathrm{o}\,(x)$, selon laquelle grosso modo, pour x proche de 0, $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + x^2$.
Cette approximation n'a de sens que si l'on peut y mesurer l'erreur commise.
En l'occurrence, ici $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + x^2$ à un $\mathrm{o}\,(x)$ près.
C'est un peu comme quand on dit que $\pi \simeq 3,141592$ à 10^{-2} près.

I. Négligeabilité

1. Introduction

Remarque : Partons de l'affirmation $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x)$, selon laquelle grosso modo, pour x proche de 0, $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + x^2$.
Cette approximation n'a de sens que si l'on peut y mesurer l'erreur commise.
En l'occurrence, ici $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + x^2$ à un $\mathrm{o}(x)$ près.
C'est un peu comme quand on dit que $\pi \simeq 3,141592$ à 10^{-2} près.

Vous répondrez naturellement « Pourquoi pas seulement $3,14$ puisqu'on raisonne à 10^{-2} près ? » Et vous aurez raison. Raisonner à 10^{-2} près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2}.
Ainsi, l'approximation $\pi \simeq 3,14$ à 10^{-2} près est aussi précise que l'approximation
$\pi \simeq 3,141592$ à 10^{-2} près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.

I. Négligeabilité
1. Introduction

Remarque : Partons de l'affirmation $\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x)$, selon laquelle grosso modo, pour x proche de 0, $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + x^2$.

Cette approximation n'a de sens que si l'on peut y mesurer l'erreur commise. En l'occurrence, ici $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + x^2$ à un $\mathrm{o}(x)$ près.

C'est un peu comme quand on dit que $\pi \simeq 3,141592$ à 10^{-2} près.

Ainsi, l'approximation $\pi \simeq 3,14$ à 10^{-2} près est aussi précise que l'approximation
$\pi \simeq 3,141592$ à 10^{-2} près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.

Il se passe la même chose avec les petits o. Comme $x^2 \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}(x)$, la quantité x^2 est inutile dans la relation $\mathrm{e}^x = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x)$ donc nous pouvons lui couper la tête, tronquer, et écrire

$$\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} = 1 + x + \mathrm{o}(x).$$

Cette nouvelle proposition n'est ni plus ni moins précise que la précédente mais elle est plus lisible et plus économe.

Moralité : Tout petit o est un niveau de précision, un seuil de visibilité. De vous-mêmes, à chaque instant, faites le ménage, coupez la tête de tous les invisibles !

ATTENTION

Attention à l'abus de notation que l'on fait en écrivant $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$.

Il ne s'agit pas vraiment d'une égalité, et c'est à prendre plus dans le sens d'une appartenance :

« $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble des suites négligeables devant $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ».

Si on garde en tête l'idée qu'il s'agit d'une appartenance, on évite un certain nombre d'erreurs que peut véhiculer la notation.

Par exemple :

- $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et $u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ n'implique pas $u_n = u'_n$, ce qui est assez troublant formellement pour une égalité.

ATTENTION

Attention à l'abus de notation que l'on fait en écrivant $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$.

Il ne s'agit pas vraiment d'une égalité, et c'est à prendre plus dans le sens d'une appartenance :

« $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble des suites négligeables devant $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ».

Si on garde en tête l'idée qu'il s'agit d'une appartenance, on évite un certain nombre d'erreurs que peut véhiculer la notation.

Par exemple :

- $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et $u_n' \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ n'implique pas $u_n = u_n'$, ce qui est assez troublant formellement pour une égalité.
- On ne peut pas simplifier des o : $u_n + \mathrm{o}\left(w_n\right) \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}\left(w_n\right)$ n'implique pas $u_n = v_n$.

Exercice 1 :

Soient $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Simplifier les expressions suivantes avec un degré de précision de l'ordre du $\mathrm{o}\left(x\right)$:

1. $\ln(1+x) + \sin x$.

Exercice 1 :

Soient $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Simplifier les expressions suivantes avec un degré de précision de l'ordre du $\mathrm{o}\left(x\right)$:

1. $\ln(1+x) + \sin x$.
2. $\ln(1+x) - \sin x$.

Exercice 1 :

Soient $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Simplifier les expressions suivantes avec un degré de précision de l'ordre du $\mathrm{o}\left(x\right)$:

1. $\ln(1+x) + \sin x$.
2. $\ln(1+x) - \sin x$.
3. $\sin(x)\ln(1+x)$ à $\mathrm{o}\left(x^3\right)$ près.

I. Négligeabilité
1. Introduction

Théorème 4 (Limites et petits o) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
Alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff f \underset{x\to a}{=} \ell + \mathrm{o}\,(1)$.
En particulier, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(1)$.

Théorème 4 (Limites et petits o) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
Alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff f \underset{x\to a}{=} \ell + \mathrm{o}\,(1)$.
En particulier, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(1)$.

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}\,(1)$.
En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(1)$.

On rappelle que, dans dans toute la suite :

- chaque fois que l'on écrira $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ on sous-entendra $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de a ou $g(a) = 0$ mais dans ce cas $f(a) = 0$ aussi, On rappelle que, dans dans toute la suite :

- chaque fois que l'on écrira $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ on sous-entendra $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de a ou $g(a) = 0$ mais dans ce cas $f(a) = 0$ aussi,
- de même, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ sous-entendra $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Proposition 5 (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives) :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(\lambda g\right)$ et $\lambda f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$.

I. Négligeabilité

2. Opérations sur les petits o

Proposition 5 (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives) :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g)$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

Proposition 5 (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives) :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g)$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

Exemple 4 :

Si on admet l'égalité $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} &\underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{2}{n} + 2\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Proposition 6 (La somme de deux petits o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ et $g \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ alors $f \pm g \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$.

I. Négligeabilité

2. Opérations sur les petits o

Proposition 6 (La somme de deux petits o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$ alors $f \pm g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n)$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n)$.

Proposition 6 (La somme de deux petits o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ alors $f \pm g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$.

ATTENTION

$\mathrm{o}\left(h\right) - \mathrm{o}\left(h\right) \neq 0$!...

$x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^3\right)$ et $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} = \mathrm{o}\left(x^3\right)$ mais
$x - x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^3\right) \neq 0$.

Proposition 6 (La somme de deux petits o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ alors $f \pm g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$.

ATTENTION

$\mathrm{o}\left(h\right) - \mathrm{o}\left(h\right) \neq 0\,!$...

$x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^3\right)$ et $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} = \mathrm{o}\left(x^3\right)$ mais
$x - x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^3\right) \neq 0$.

Exemple 5 :

Avec $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) + \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2\mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Proposition 7 (Un petit o d'un petit o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(h)$ alors $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(h)$.

I. Négligeabilité

2. Opérations sur les petits o

Proposition 7 (Un petit o d'un petit o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ et $g \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ alors $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$.

Suites : Si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$ alors $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$.

Proposition 7 (Un petit o d'un petit o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(h\right)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(w_n\right)$.

En d'autres termes, la relation « être négligeable » est transitive.

À part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de négligeabilité se comporte à peu près comme une relation d'ordre stricte.

Exemple 6 :

Prenons l'égalité $\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{o}\left(\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

On dit que l'on a tronqué à l'ordre $\dfrac{1}{n}$.

Proposition 8 (Les petits o sont compatibles avec le produit) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(k)$ alors $fg \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(hk)$.

Proposition 8 (Les petits o sont compatibles avec le produit) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(k)$ alors $fg \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(hk)$.

Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ alors $fh \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(gh)$.

Proposition 8 (Les petits o sont compatibles avec le produit) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(k)$ alors $fg \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(hk)$.

Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g)$ alors $fh \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(gh)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(t_n)$ alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_nt_n)$.

Proposition 8 (Les petits o sont compatibles avec le produit) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(k)$ alors $fg \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(hk)$.

Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ alors $fh \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(gh)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(t_n)$ alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n t_n)$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n w_n)$.

Proposition 8 (Les petits o sont compatibles avec le produit) :

Fonctions : Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$ et $g \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(k)$ alors $fg \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(hk)$.

Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ alors $fh \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(gh)$.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(t_n)$ alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_nt_n)$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ alors $u_nw_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_nw_n)$.

En particulier, $x^2 \times \mathrm{o}\,(x) = \mathrm{o}\,(x^3)$, $x \times \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{o}\,(1)$, ...

Exemple 7 :

Reprenons les égalités $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\,(x)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\,(x)$.

Alors
$$\begin{aligned}
\sin(x)\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \big(1 + x + \mathrm{o}\,(x)\big)\big(x + \mathrm{o}\,(x)\big)\\
&\underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\,(x) + x^2 + x \times \mathrm{o}\,(x) + x \times \mathrm{o}\,(x) + \mathrm{o}\,(x) \times \mathrm{o}\,(x)\\
&\underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\,(x) + \underbrace{x^2 + 2x \times \mathrm{o}\,(x) + \mathrm{o}\,(x^2)}_{\underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)}\\
&\underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\,(x)\,.
\end{aligned}$$

Proposition 9 (Les petits o sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie sur un voisinage de b à valeurs dans I.
Si $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ et $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = a$ alors $f \circ \varphi \underset{x \to b}{=} \mathrm{o}\,(g \circ \varphi)$.

Proposition 9 (Les petits o sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie sur un voisinage de b à valeurs dans I.
Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ et $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$ alors $f \circ \varphi \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\,(g \circ \varphi)$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_{\varphi(n)}\right)$.

Proposition 9 (Les petits o sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie sur un voisinage de b à valeurs dans I.
Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ et $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$ alors $f\circ\varphi \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\,(g\circ\varphi)$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_{\varphi(n)}\right)$.

On peut donc composer à droite par une fonction φ ce qui revient à changer la variable x en une autre $u = \varphi(x)$.

Composer à gauche reviendrait à changer la fonction. Cela ne peut être possible par essence.

Proposition 9 (Les petits o sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie sur un voisinage de b à valeurs dans I.
Si $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ et $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = a$ alors $f \circ \varphi \underset{x \to b}{=} \mathrm{o}\,(g \circ \varphi)$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante.
Si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_{\varphi(n)}\right)$.

On peut donc composer à droite par une fonction φ ce qui revient à changer la variable x en une autre $u = \varphi(x)$.

Composer à gauche reviendrait à changer la fonction. Cela ne peut être possible par essence.

Exemple 8 :

$\sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(x)$ alors $\sqrt{\ln x} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(\ln x)$.

De même, comme $2^n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(3^n)$ alors $2^{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(3^{n^2}\right)$.

En pratique, pour $a \neq \pm\infty$, ce résultat permet en particulier de ramener par la translation $\varphi : x \longmapsto x + a$ toute relation $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ au voisinage de a en une relation

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \mathrm{o}\left(g(a+h)\right) \text{ au voisinage de } 0.$$

En pratique, pour $a \neq \pm\infty$, ce résultat permet en particulier de ramener par la translation $\varphi : x \longmapsto x + a$ toute relation $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ au voisinage de a en une relation

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \mathrm{o}\left(g(a+h)\right) \text{ au voisinage de } 0.$$

ATTENTION

Il est formellement interdit de composer une relation de négligeabilité par la gauche.

Par exemple, $\sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x\right)$ mais

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln x} = \frac{1}{2} \neq 0 \implies \ln\left(\sqrt{x}\right) \cancel{\underset{x \to +\infty}{=}} \mathrm{o}\left(\ln x\right).$$

II. Développements limités

II. Développements limités

1. Introduction

Nous cherchons dans ce paragraphe à approcher les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0.

Nous allons, par exemple, montrer que :

$$\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

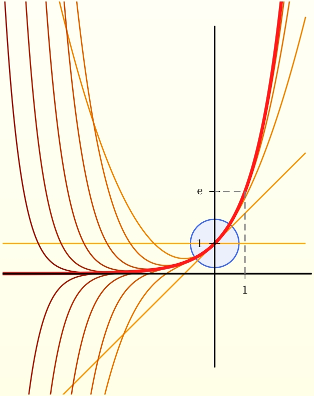
II. Développements limités

1. Introduction

Nous cherchons dans ce paragraphe à approcher les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0.

Nous allons, par exemple, montrer que :

$$\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$



Définition 2 (Développement limité) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, noté aussi un $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe des réels a_0, ..., a_n tels que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

L'expression polynomiale $\mathrm{P}(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$ est appelé la partie régulière du développement limité.

Définition 2 (Développement limité) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, noté aussi un $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe des réels a_0, ..., a_n tels que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

L'expression polynomiale $\mathrm{P}(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$ est appelé la partie régulière du développement limité.

Plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a. Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise :

L'ordre n du $\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ contrôle l'erreur de l'approximation.

Remarques :

- On note toujours $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.

Remarques :

- On note toujours $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.
- On a $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Dans la pratique on ne développe jamais les termes $(x-a)^k$ ce qui n'aurait aucun intérêt.

Remarques :

- On note toujours $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.
- On a $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Dans la pratique on ne développe jamais les termes $(x-a)^k$ ce qui n'aurait aucun intérêt.
- Le reste du $\mathrm{DL}_n(a)$ *i.e.* $\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$, donne l'ordre du développement et peut aussi se mettre, suivant les besoins, sous la forme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques :

- On note toujours $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.
- On a $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Dans la pratique on ne développe jamais les termes $(x-a)^k$ ce qui n'aurait aucun intérêt.
- Le reste du $DL_n(a)$ *i.e.* $o\left((x-a)^n\right)$, donne l'ordre du développement et peut aussi se mettre, suivant les besoins, sous la forme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ où $\displaystyle\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples 9 :

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$: $DL_1(0)$ de $\sin(x)$, sa partie régulière est x.

Remarques :

- On note toujours $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.
- On a $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Dans la pratique on ne développe jamais les termes $(x-a)^k$ ce qui n'aurait aucun intérêt.
- Le reste du $\mathrm{DL}_n(a)$ *i.e.* $\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$, donne l'ordre du développement et peut aussi se mettre, suivant les besoins, sous la forme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ où $\displaystyle\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples 9 :

- $\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$: $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\sin(x)$, sa partie régulière est x.
- Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} \underset{u = \frac{1}{x^2}}{=} \lim_{u \to -\infty} u\,\mathrm{e}^u = 0$ alors $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.

  C'est un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ au voisinage de 0 dont la partie régulière est nulle.

Exercice 2 :

Comment s'écrit le développement limité d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme au voisinage de 0 ?

II. Développements limités
1. Introduction

Exercice 2 :

Comment s'écrit le développement limité d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme au voisinage de 0 ?

Exercice 3 (DL de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0) :

Montrer que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &\underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right).\end{aligned}$$

Méthode 1 :

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0.
  Précisément, si $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$, alors, après composition à **droite** par la fonction $x \longmapsto x + a$, on obtient :

$$f(x+a) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

Méthode I :

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0.
  Précisément, si $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$, alors, après composition à **droite** par la fonction $x \longmapsto x+a$, on obtient :
  $$f(x+a) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$
- On peut tronquer un développement limité d'ordre n en un développement limité à un ordre inférieur $m \leqslant n$ en oubliant les termes de degré compris en $m+1$ et n.
  Plus précisément, si on a un développement limité de f à l'ordre n
  i.e. $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ alors, pour $m \leqslant n$, $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^m + \mathrm{o}\left((x-a)^m\right)$ est un développement limité de f à l'ordre m.

Théorème 10 (Unicité du développement limité) :

Si f admet un développement limité au voisinage d'un réel a alors celui-ci est unique.

Théorème 10 (Unicité du développement limité) :

Si f admet un développement limité au voisinage d'un réel a alors celui-ci est unique.

Corollaire 10.1 (Parité/Imparité) :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction où $0 \in \mathrm{I}$ et I est un intervalle symétrique par rapport à 0.

- Si f est paire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang impair sont nuls.

Théorème 10 (Unicité du développement limité) :

Si f admet un développement limité au voisinage d'un réel a alors celui-ci est unique.

Corollaire 10.1 (Parité/Imparité) :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction où $0 \in \mathrm{I}$ et I est un intervalle symétrique par rapport à 0.

- Si f est paire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang impair sont nuls.
- Si f est impaire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang pair sont nuls.

Exemple 10 :

Reprenons l' **exemple** (3) , en composant à droite par $x \longmapsto x^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k + \mathrm{o}\left((-x^2)^n\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right).\end{aligned}$$

Tous les coefficients de rangs impairs sont nuls.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème II (Développement limité et continuité/dérivabilité) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- f est continue en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a.
  Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \mathrm{o}\,(1)$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème 11 (Développement limité et continuité/dérivabilité) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- f est continue en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a.
  Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}\,(1)$.
- f est dérivable en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a.
  Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}\,(x-a)$.

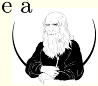
Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème II (Développement limité et continuité/dérivabilité) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- f est continue en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a.
  Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}\,(1)$.
- f est dérivable en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a.
  Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}\,(x-a)$.

En reconnaissant la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, les développements limités prolongent ainsi naturellement la notion de tangente à la courbe de f en un point a.



Remarque : Dans un développement limité de f au voisinage de a, le coefficient d'ordre 0 est TOUJOURS $f(a)$ et celui d'ordre 1, TOUJOURS $f'(a)$.

ATTENTION

Le *théorème* (11) ne va pas plus loin et il existe des fonctions admettant des développements limités d'ordre supérieur à deux au voisinage d'un point a sans être deux fois dérivables en ce point.

ATTENTION

Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Comme la fonction *sin* est bornée,

$$f(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=o\left(x^2\right). \qquad (1)$$

Ainsi, f admet le développement limité à l'ordre 2 en 0 suivant :

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}0+0x+0x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Or, il est facile de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, avec

$$f'(x)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}\left(1\right). \qquad (2)$$

Avec (1), f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$, et ce prolongement est également dérivable en 0 avec $f'(0)=0$ d'après (2).

Or, $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=3x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

La fonction f, bien qu'admettant un développement limité à l'ordre 2, n'est pas deux fois dérivable en 0.

On commence par un lemme simple avant la version plus générale :

Lemme 1 :

Soient $g \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$, $a \in \mathrm{I}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $g'(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ alors $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$.

II. Développements limités

2. Primitivation des développements limités

On commence par un lemme simple avant la version plus générale :

Lemme 1 :

Soient $g \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$, $a \in \mathrm{I}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $g'(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ alors $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$.

Théorème 12 (Primitivation des développements limités) :

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ avec a_0, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Théorème 12 (Primitivation des développements limités) :

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ avec a_0, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

On peut donc toujours primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

Théorème 12 (Primitivation des développements limités) :

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, $f'(x) \underset{x \to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ avec a_0, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

On peut donc toujours primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

On prendra garde au fait que le premier coefficient est alors $f(a)$.

Exemple 11 (DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0) :

Comme $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$, alors $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$ par composition à droite par $x \longmapsto -x$ puis, par primitivation et avec $\ln(1+0) = \ln 1 = 0$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

Remarque : $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$.

Exercice 4 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

À partir de la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ trouver un DL_5 au voisinage de 0 de $\tan(x)$.

II. Développements limités

3. Formule de Taylor-Young

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young) :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si $f \in \mathcal{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a et, plus précisément :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \\ &\underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \end{aligned}$$

Le polynôme P_n définit par $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k$ est appelé polynôme de Taylor d'ordre n associé à f au point a.

II. Développements limités

3. Formule de Taylor-Young

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young) :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si $f \in \mathcal{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a et, plus précisément :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \\ &\underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \end{aligned}$$

Le polynôme P_n définit par $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k$ est appelé polynôme de Taylor d'ordre n associé à f au point a.

Vocabulaire : On emploie parfois le terme série de Taylor associée à f en a pour désigner la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques et commentaires importants

- Le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de a n'est rien d'autre que l'expression de la droite tangente à la courbe de f en a.
  Les développements de Taylor sont donc à voir comme une généralisation polynomiale de la droite tangente, aux ordres supérieurs.
  On pourra notamment vérifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

Remarques et commentaires importants

- La formule de Taylor-Young ne donne qu'une information locale au voisinage de a.
  Pour un comportement global, il est nécessaire d'estimer l'erreur faite en approchant f par son développement de Taylor $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ au voisinage de a. Nous répondrons à cette question en fin d'année avec un résultat connu sous le nom de « formule de Taylor-Lagrange ».

ATTENTION

En aucun cas, elle ne peut être utilisée pour une étude globale mais localement il s'agit de la meilleure approximation par un polynôme de degré au plus n.

Même si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, on n'est pas assuré que le développement de Taylor tende vers f lorsque n tend vers $+\infty$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont nulles en 0 *i.e.* son développement limité en 0 à tout ordre est nul sans que la fonction f ne le soit $\left(f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Remarques et commentaires importants

- Le théorème (13) est avant tout un théorème d'existence des développements limités.
  Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une implication (seulement) :

f continue	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 0.
f dérivable	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 1.
f de classe $\mathcal{C}^n$	$\Longrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre n.
f de classe $\mathcal{C}^\infty$	$\Longrightarrow$	Existence d'un développement limité à tout ordre.

ATTENTION

La réciproque n'est pas du tout vraie, il existe des fonctions qui admettent par exemple des développements limités à tout ordre en 0 sans être de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Par exemple, la fonction définie en (1) par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{, si } x \neq 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

admet un développement limité (nul) à l'ordre 2 en 0 sans être de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de 0.

Remarques et commentaires importants

- Retenez aussi que l'existence d'un DL à l'ordre n au voisinage de a n'implique pas l'existence de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en a comme pour la fonction définie en (3).

Remarques et commentaires importants

- Retenez aussi que l'existence d'un DL à l'ordre n au voisinage de a n'implique pas l'existence de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en a comme pour la fonction définie en (3).
- Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young. Je le redis, le lien entre existence du DL_n et de la dérivée $n^{\text{ème}}$ n'est vrai que pour les tous petits ordres $n = 0$ et $n = 1$ et **ça s'arrête là !**

Exercice 5 (DL de e^x au voisinage de 0) :

1. Donner le développement limité de e^x au voisinage de 0.

Exercice 5 (DL de e^x au voisinage de 0) :

1. Donner le développement limité de e^x au voisinage de 0.
2. En déduire ceux de $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$.

Exemple 12 (DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0) :

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-1\,;+\infty[$ et, $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$est :

$$x \longmapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a alors :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

Exemple 12 (DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0) :

Remarques :

- Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, $\forall\, k \in [\![0\,;\alpha]\!]$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

  Dans ce cas et ce cas seulement, le développement limité de $(1+x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0 est tout simplement le développement de la formule du binôme.

Conclusion : Quand vous cherchez un développement limité de $(1+x)^5$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0, utilisez simplement la formule du binôme :

$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 = 1+5x+10x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Exemple 12 (DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0) :

Remarques :

- Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, le développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)^{-\alpha}}$ est, au signe près, la dérivée terme à terme $-(\alpha+1)^{\text{ème}}$ de celui de $\dfrac{1}{1+x}$ *i.e.* on peut donc dériver une série géométrique.

  De manière « plus synthétique » : $\dfrac{1}{(1+x)^{-\alpha}} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-\alpha-1}{k-\alpha-1} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right).$

Exemple 12 (DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0) :

Remarques :

- Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, le développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)^{-\alpha}}$ est, au signe près, la dérivée terme à terme $-(\alpha+1)^{\text{ème}}$ de celui de $\dfrac{1}{1+x}$ *i.e.* on peut donc dériver une série géométrique.

  De manière « plus synthétique » : $\dfrac{1}{(1+x)^{-\alpha}} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-\alpha-1}{k-\alpha-1} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

- Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on généralise les coefficients binomiaux en posant :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

  On réécrit alors le développement limité de $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

Exemple 13 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

La fonction tangente est de classe au moins $\mathcal{C}^3$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

D'après la formule de Taylor-Young, il reste à calculer ses quatre premières dérivées en 0.

$$\begin{aligned}\tan(0) &= 0,\\ \tan'(0) &= 1+\tan^2(0) = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan''(0) &= 2\tan'(0)\tan(0)\\ &= 0,\\ \text{et}\ \ \tan'''(0) &= 2\tan'(0) + 6\tan'(0)\tan^2(0)\\ &= 2.\end{aligned}$$

Donc $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

On peut déterminer explicitement un développement limité de tangente à tout ordre au voisinage de 0, mais le résultat est compliqué, pas bien utile et hors programme.

Exercice 6 (DL de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ au voisinage de 0) :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\cos^{(k)}(0)$ et $\sin^{(k)}(0)$.

Exercice 6 (DL de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ au voisinage de 0) :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\cos^{(k)}(0)$ et $\sin^{(k)}(0)$.
2. En déduire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions cosinus et sinus.

Pour le plaisir : Si jamais vous étiez tentés de penser que le développement limité en 0 de tangente n'est pas si compliqué, le voici :

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)\mathrm{B}_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1} + \mathrm{o}\left(x^{2n-1}\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots,\end{aligned}$$

Pour le plaisir : Si jamais vous étiez tentés de penser que le développement limité en 0 de tangente n'est pas si compliqué, le voici :

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)\mathrm{B}_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} + \mathrm{o}\left(x^{2n-1}\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots,\end{aligned}$$

où les nombres B_n apparaissant dans le développement de $\tan(x)$ sont les nombres de Bernoulli définis par la formule explicite :

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

La dérivation de développements limités se passe moins bien que l'intégration. En effet, contrôler l'intégrale d'un petit o se fait bien, par majoration : si un terme est petit, son intégrale aussi, sur un intervalle donné.

En revanche, un terme peut être petit, mais avoir de très fortes variations locales (petites oscillations très pentues). Ainsi, la dérivation d'un petit o n'est en général pas contrôlable.

Il faut, de ce fait, des hypothèses **fortes** pour pouvoir dériver un développement limité, en revenant à la formule de Taylor-Young.

Théorème 14 (Dérivation des développements limités (Admis)) :

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a **et** si sa dérivée f' y admet également un développement limité à l'ordre $n-1$ alors, la partie principale du développement limité de f' est la dérivée de celle du développement limité de f au voisinage de a.

Théorème 14 (Dérivation des développements limités (Admis)) :

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a **et** si sa dérivée f' y admet également un développement limité à l'ordre $n-1$ alors, la partie principale du développement limité de f' est la dérivée de celle du développement limité de f au voisinage de a.

Pour pouvoir dériver un DL, il est nécessaire que la dérivée admette elle-même un développement limité et dans ce cas et seulement celui-là, son DL sera la dérivée de sa primitive. C'est ce que dit le théorème.

Théorème 14 (Dérivation des développements limités (Admis)) :

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I}\,; \mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$.

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a **et** si sa dérivée f' y admet également un développement limité à l'ordre $n-1$ alors, la partie principale du développement limité de f' est la dérivée de celle du développement limité de f au voisinage de a.

ATTENTION

Il se peut très bien, hélas, que f admette un développement limité à l'ordre n sans que f' admette un développement limité à l'ordre $n-1$.

La fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en (3) avec $f(0) = 0$, admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ sans que sa dérivée admette un $\mathrm{DL}_1(0)$.

En effet, si c'était le cas, en vertu du théorème (11), f' serait dérivable en 0, ce qu'elle n'est pas.

Exemple 14 (DL de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ au voisinage de 0) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty\,;1[$ et on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right).$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est de classe au moins $\mathcal{C}^n$ sur $]-\infty\,;1[$ donc admet un développement limité en 0 d'après le théorème (13).

Exemple 14 (DL de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ au voisinage de 0) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]-\infty\,;1[$ et on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right).$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est de classe au moins $\mathscr{C}^n$ sur $]-\infty\,;1[$ donc admet un développement limité en 0 d'après le théorème (13).

On peut donc appliquer le théorème (14) et on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} + \mathrm{o}\left(x^n\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).\end{aligned}$$

Exercice 7 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

À partir de la relation

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x),$$

retrouver un DL_5 au voisinage de 0 de la fonction tangente.

II. Développements limités
5. Développements usuels

Les formules du tableau qui suit doivent être connues **par cœur, sans délai et sans la moindre hésitation**.

II. Développements limités

5. Développements usuels

Les formules du tableau qui suit doivent être connues **par cœur, sans délai et sans la moindre hésitation**.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres 0, 2, 4, 6, ...bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 1, 3, 5, 7, ...il suffit de tronquer au bon endroit :

$$\begin{aligned}\cos(x) &\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^{3}\right)\end{aligned}$$

Les formules du tableau qui suit doivent être connues **par cœur, sans délai et sans la moindre hésitation**.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres 0, 2, 4, 6, ...bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 1, 3, 5, 7, ...il suffit de tronquer au bon endroit :

$$\begin{aligned}\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^{\color{red}3}\right)\end{aligned}$$

Notez bien que ce développement est plus fin que le développement à l'ordre 2,

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, il y a un terme d'ordre 3, avec un coefficient 0.

Les formules du tableau qui suit doivent être connues **par cœur, sans délai et sans la moindre hésitation**.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres 0, 2, 4, 6, ...bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 1, 3, 5, 7, ...il suffit de tronquer au bon endroit :

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Notez bien que ce développement est plus fin que le développement à l'ordre 2,

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, il y a un terme d'ordre 3, avec un coefficient 0.

À l'ordre 2, c'est différent, on ne voit pas de terme d'ordre 3 parce qu'un tel terme est réellement invisible à ce niveau de précision.

$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$
$\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \ldots (-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right).$
$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right).$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right).$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k+\mathrm{o}\left(x^n\right) \text{ où } \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} \text{ est le coefficient du binôme généralisé à } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times 2n}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right).$$

e^x	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).$
$\cos(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$
$\sin(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$
$\operatorname{ch}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$
$\operatorname{sh}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\mathrm{ch}\,(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\mathrm{sh}\,(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathrm{o}\left(x^{8}\right).$$

On se limite dans tout ce paragraphe à des développements limités en 0 ; les fonctions usuelles étant développées en ce point.

On se ramènera, en pratique, systématiquement à ce cas par changement de variable.

- En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, sous la forme :

  $$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right),$$

  alors, en posant $x = a + h$, la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ admet un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

  $$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

- En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, sous la forme :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right),$$

alors, en posant $x = a+h$, la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ admet un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

- Si f est définie au voisinage de $\pm\infty$, on pourra poser $h = \dfrac{1}{x}$, la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ admet alors un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{h^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{h^n}\right).$$

- En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, sous la forme :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right),$$

alors, en posant $x = a+h$, la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ admet un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

- Si f est définie au voisinage de $\pm\infty$, on pourra poser $h = \dfrac{1}{x}$, la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ admet alors un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{h^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{h^n}\right).$$

- En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, sous la forme :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right),$$

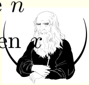
alors, en posant $x = a + h$, la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ admet un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

- Si f est définie au voisinage de $\pm\infty$, on pourra poser $h = \dfrac{1}{x}$, la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ admet alors un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{h^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{h^n}\right).$$

On dit alors que f admet un développement asymptotique en $\dfrac{1}{h}$ d'ordre n en $\pm\infty$ et on remarquera que la partie régulière n'est pas un polynôme en x mais en $\dfrac{1}{x}$.



Exercice 8 (DL de $\ln(x)$ au voisinage de 2) :

Donner un DL_3 de $\ln(x)$ au voisinage de 2.

Proposition 15 (Opérations algébriques) :

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathrm{N}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{P}(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{Q}(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \text{ où } \mathrm{P},\, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}].$$

- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est $\lambda \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$.

Proposition 15 (Opérations algébriques) :

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathrm{N}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{P}(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{Q}(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \text{ où P, Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}].$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est $\lambda \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$.
- fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est $\mathrm{P}(x) \times \mathrm{Q}(x)$ tronqué à l'ordre n.

Exemples 15 :

- Le DL_5 de $x \longmapsto \mathrm{e}^x + \cos(x)$ en 0 est :

$$\mathrm{e}^x + \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$

Exemples 15 :

- Le DL_5 de $x \longmapsto \mathrm{e}^x + \cos(x)$ en 0 est :

$$\mathrm{e}^x + \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$

- Pour les produits, on se contente, en pratique, de développer le produit des polynômes en omettant d'écrire les termes de degré supérieur à l'ordre recherché pour le DL.

  Ainsi, le DL_5 en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$ est :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Donner un $\mathrm{DL}_7(0)$ de $\operatorname{sh}^4(x)$.

Pas de propriété très rigoureuse à énoncer dans le cas d'une composée de deux fonctions, mais en pratique, on sait calculer le DL_n de $(g \circ f)(x)$ en $f(a)$ en remplaçant dans le DL_n de g en $f(a)$, la valeur de x par celle de $f(x)$.

ATTENTION

Comme on travaillera essentiellement avec des DL en 0, attention à ne pas composer par une fonction qui n'a pas une limite nulle quand x tend vers 0 !

On justifiera bien que l'on a bien un $o(1)$ avant d'utiliser les DL usuels en 0.

Proposition 16 (Composition) :

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathrm{N}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{P}(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{Q}(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \text{ où } \mathrm{P},\, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}].$$

Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ alors $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est $(\mathrm{P} \circ \mathrm{Q})(x)$.

ATTENTION

Lors de la recherche de développements limités de fonctions composées, il faudra prendre garde à prendre en compte tous les termes du même ordre.

ATTENTION

Par exemple, deux développements limités FAUX pour l'illustration :

On a :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x}-1 \underset{x\to 0}{=} x+x^2+o\left(x^2\right).$$

FAUX :
$$e^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x\to 0}{=} e^{x+o(x)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right).$$

Les termes d'ordre 2 du DL de $\dfrac{1}{1-x}-1$ n'ont pas été pris en compte.

ATTENTION

Par exemple, deux développements limités FAUX pour l'illustration :

On a :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x}-1 \underset{x\to 0}{=} x+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

FAUX : $$\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{x+\mathrm{o}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Les termes d'ordre 2 du DL de $\frac{1}{1-x}-1$ n'ont pas été pris en compte.

FAUX : $$\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{x+x^2+\mathrm{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Les termes d'ordre 2 du DL de e^u avec $u=x+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$ n'ont pas été pris en compte.

ATTENTION

On a :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x}-1 \underset{x\to 0}{=} x+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

CORRECT :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}-1} &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{x+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x+\cancel{x^2}+\cancel{\mathrm{o}\left(x^2\right)}\right)^2 \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\frac{1}{2}\left(x^2\right)+\mathrm{o}\left(x^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{3}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Exemple 16 :

Cherchons le DL_5 en 0 de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{\overbrace{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+\mathrm{o}(x^5)}^{=u\xrightarrow[x\to 0]{}0}} \\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1+u+\frac{1}{2}u^2\right)+\underbrace{\mathrm{o}\left(u^2\right)}_{=\mathrm{o}(x^5)}
\end{aligned}$$

Inutile d'aller plus loin car $u \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$,

$$\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4\right)+\mathrm{o}\left(x^5\right),$$

en tronquant tous les termes d'ordre supérieur à 5.

$$\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x^2+\frac{\mathrm{e}}{6}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)$$

ATTENTION

Ne pas confondre composition à droite et à gauche.

ATTENTION

Ne pas confondre composition à droite et à gauche.

En effet, si $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$ est un développement à l'ordre 4, voire 5, en composant à droite, il en est tout autrement de $\big(\ln(1+x)\big)^2$ où la composition a lieu à gauche si l'on veut un développement au même ordre :

$$\begin{aligned}\big(\ln(1+x)\big)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2 \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + x^3 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)\end{aligned}$$

ATTENTION

Ne pas confondre composition à droite et à gauche.

En effet, si $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$ est un développement à l'ordre 4, voire 5, en composant à droite, il en est tout autrement de $\big(\ln(1+x)\big)^2$ où la composition a lieu à gauche si l'on veut un développement au même ordre :

$$\begin{aligned}\big(\ln(1+x)\big)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2 \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + x^3 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)\end{aligned}$$

On remarquera que l'on a pu se contenter d'un DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ pour obtenir un DL à l'ordre 5 grâce à la présence du x dans le développement qui nous a fait gagner un ordre.

Méthode 2 :

Soit f une fonction bijective ou au moins injective au voisinage de 0, de classe $\mathcal{C}^n$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

Alors f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n en 0.

On peut le déterminer en identifiant les DL

$$x = (f^{-1} \circ f)(x) + \text{o}\left(x^n\right)$$

fournissant $n+1$ équations dont les inconnues sont les coefficients du DL de f^{-1}.

L'identification est possible du fait de l'unicité du développement limité.

Exercice 10 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.

Exercice 10 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Donner ce développement limité.

Proposition 17 (Inversion) :

Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 et telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a \neq 0$.

Alors $\dfrac{1}{f}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en composant le DL_n en 0 de $\dfrac{1}{1+u}$ avec celui de $\dfrac{f(x)-a}{a}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{a}$.

II. Développements limités

6. Opérations sur les développements limités

Proposition 17 (Inversion) :

Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 et telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a \neq 0$.

Alors $\dfrac{1}{f}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en composant le DL_n en 0 de $\dfrac{1}{1+u}$ avec celui de $\dfrac{f(x)-a}{a}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{a}$.

Méthode 3 :

Dans le cas des quotients, on essaiera toujours de les écrire sous la forme $\dfrac{u(x)}{1+v(x)}$ avec $v \underset{x \to 0}{=} o(1)$, ce qui permet de composer par $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ dont on connaît le développement limité, puis effectuer un produit de DL.

Exemple 17 :

Cherchons le DL_5 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos(x)}$.

On commence par écrire $\dfrac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{24}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)}$.

En posant $u=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{24}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)$, on applique le DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} 1+u+u^2+\mathrm{o}\left(u^2\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{24}x^4+\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\\
\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{10}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Exercice 11 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

Donner un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Exercice 11 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

Donner un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Exercice 12 (DL de $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ au voisinage de 0) :

Donner un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Derniers commentaires :

- Si $f(0) = 0$, et si f admet une partie principale d'ordre k, on peut mettre x^k en facteur.
  Dans ce cas, on est ramené à une fonction $x \longmapsto f(x) = x^k g(x)$ où g se prolonge en une fonction ne s'annulant pas en 0 et à laquelle on peut donc appliquer les méthodes précédentes pour obtenir un développement limité d'expression de la forme

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^k} \times \frac{1}{g(x)}.$$

  Comme on divise par x^k, on obtiendra en fait un développement contenant également des puissances négatives de x. Ce n'est donc pas un DL à proprement parler mais ce qu'on appelle un développement asymptotique.
  On en reparlera un peu plus loin (cf. paragraphe (4)).

Derniers commentaires :

- Si $f(0)=0$, et si f admet une partie principale d'ordre k, on peut mettre x^k en facteur.
  Dans ce cas, on est ramené à une fonction $x \longmapsto f(x)=x^k g(x)$ où g se prolonge en une fonction ne s'annulant pas en 0 et à laquelle on peut donc appliquer les méthodes précédentes pour obtenir un développement limité d'expression de la forme

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^k}\times\frac{1}{g(x)}.$$

  Comme on divise par x^k, on obtiendra en fait un développement contenant également des puissances négatives de x. Ce n'est donc pas un DL à proprement parler mais ce qu'on appelle un développement asymptotique.
  On en reparlera un peu plus loin (cf. paragraphe (4)).

Exemple 18 :

$$\frac{1}{x^2\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{24}{x}^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Derniers commentaires :

- Il existe des techniques plus efficaces que la composition pour faire le quotient de deux DL, notamment pour des ordres importants, en particulier une adaptation de la division euclidienne des polynômes, faite en inversant l'ordre (et le rôle) des monômes. C'est ce qu'on appelle la division suivant les puissances croissantes.
  Cette méthode est hors-programme. Pour les petits ordres, la technique exposée ci-dessus est amplement suffisante.

III. Équivalence

III. Équivalence
1. Introduction

Définition 3 (Équivalence) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x \to a}{\sim} g$, si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Définition 3 (Équivalence) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x \to a}{\sim} g$, si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

III. Équivalence
1. Introduction

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.
- $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.
- $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.
- $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
- $3^n + 2^n \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n$.

III. Équivalence
1. Introduction

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.
- $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
- $3^n + 2^n \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n$.
- $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.
- $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
- $3^n + 2^n \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n$.
- $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- $\mathrm{ch}\,(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.
- $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
- $3^n + 2^n \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n$.
- $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- $\mathrm{ch}\,(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
- $\mathrm{ch}\,(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

ATTENTION

Quand vous cherchez un équivalent, votre résultat ne doit jamais se présenter comme une somme de deux ou trois termes de tailles distinctes.

Par exemple, si l'on vous demande un équivalent de $x - 3x^2 + x^5$ lorsque x tend vers 0, ne répondez pas $x - 3x^2 + x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x - 3x^2$.

C'est correct puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - 3x^2 + x^5}{x - 3x^2} = 1$ mais non abouti car vous pouvez encore comparer x et x^2, et en l'occurrence $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\,(x)$.

L'équivalence intéressante est donc $x - 3x^2 + x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

En résumé : il ne doit en rester qu'un : le plus gros, celui qu'on voit de loin.

III. Équivalence
1. Introduction

De même que précédemment, je rappelle que chaque fois que l'on utilisera la notation $f \underset{x\to a}{\sim} g$, on supposera que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être en a toutes les deux.

De la même manière, une écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ supposera que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Commençons par une lapalissade :

De même que précédemment, je rappelle que chaque fois que l'on utilisera la notation $f \underset{x \to a}{\sim} g$, on supposera que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être en a toutes les deux.
De la même manière, une écriture $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ supposera que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
Commençons par une lapalissade :

Théorème 18 (La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence) :

Qu'on parle de fonctions au voisinage d'un point ou de suites, la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

III. Équivalence

1. Introduction

Proposition 19 (Équivalence et petit o) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(g(x)\right)$$
$$\underset{x \to a}{=} g(x)\left(1 + \mathrm{o}\left(1\right)\right).$$

III. Équivalence
1. Introduction

Proposition 19 (Équivalence et petit o) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) &\underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(g(x)\right) \\ &\underset{x\to a}{=} g(x)\left(1 + \mathrm{o}\left(1\right)\right). \end{aligned}$$

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n &\underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}\left(v_n\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} v_n\left(1 + \mathrm{o}\left(1\right)\right). \end{aligned}$$

III. Équivalence
1. Introduction

Corollaire 19.1 (Équivalent d'un polynôme) :

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$.

$$\text{Alors } P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_d x^d.$$

Corollaire 19.1 (Équivalent d'un polynôme) :

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$.

$$\text{Alors } \mathrm{P}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_d x^d.$$

Théorème 20 (Développement limité et équivalence) :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{\mathrm{I}} \cap \mathbb{R}$, n, $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$ et a_p, ..., $a_n \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

III. Équivalence
1. Introduction

Corollaire 19.1 (Équivalent d'un polynôme) :

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$.

$$\text{Alors } P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_d x^d.$$

Théorème 20 (Développement limité et équivalence) :

Soient $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$, n, $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$ et a_p, ..., $a_n \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \ldots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$ avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

En résumé, le premier terme NON NUL d'un développement limité peut tenir lieu d'équivalent.

III. Équivalence
1. Introduction

ATTENTION

Une fonction ou une suite ne peuvent JAMAIS être équivalentes à 0.

Il suffit simplement de pousser le DL au lieu de dire une énorme bêtise.

III. Équivalence

1. Introduction

ATTENTION

Une fonction ou une suite ne peuvent JAMAIS être équivalentes à 0.

Il suffit simplement de pousser le DL au lieu de dire une énorme bêtise.

À retenir :

- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\dfrac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
- $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\arccos(x) - \dfrac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x$.
- $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

ATTENTION

Ne présentez jamais vos équivalents comme une somme de termes de tailles distinctes car dans une telle somme en réalité, seul le plus grand des termes compte, les autres sont négligeables.

À la place de $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, n'écrivez donc pas $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$. Cette équivalence est correcte, mais comme $x \underset{x\to 0}{=} o(1)$, écrire que $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$ c'est écrire $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$, résultat moins précis *i.e.* la précision de l'équivalence $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ est en $o(x)$ alors que la précision de l'équivalence $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ est $o(1)$.

III. Équivalence
1. Introduction

Théorème 21 (Formule de Stirling) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Théorème 21 (Formule de Stirling) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n .$$

La démonstration est hors-programme mais pas la formule.

III. Équivalence
1. Introduction

Proposition 22 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

Proposition 22 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x \to a}{\sim} g$ alors, soit f et g ont toutes les deux la même limite en a, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a.

Proposition 22 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors, soit f et g ont toutes les deux la même limite en a, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $f \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Proposition 22 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x \to a}{\sim} g$ alors, soit f et g ont toutes les deux la même limite en a, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a.
2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $f \underset{x \to a}{\sim} \ell$.

Suites :

Proposition 22 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors, soit f et g ont toutes les deux la même limite en a, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $f \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Suites :

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux la même limite, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite en $+\infty$.

Proposition 22 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors, soit f et g ont toutes les deux la même limite en a, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $f \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Suites :

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux la même limite, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite en $+\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

III. Équivalence
1. Introduction

ATTENTION

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \cancel{\Longrightarrow} f \underset{x\to a}{\sim} g \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \cancel{\Longrightarrow} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{array}}$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

III. Équivalence
1. Introduction

ATTENTION

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) \cancel{\Longrightarrow} f \underset{x\to a}{\sim} g \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \cancel{\Longrightarrow} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{array}}$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ mais $\mathrm{e}^x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} x$.

ATTENTION

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) \;\cancel{\Longrightarrow}\; f \underset{x\to a}{\sim} g \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \;\cancel{\Longrightarrow}\; u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{array}}$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ mais $\mathrm{e}^x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} x$.
- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ mais $x^2 \cancel{\underset{x\to 0}{\sim}} x$.

ATTENTION

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \cancel{\Longrightarrow} f \underset{x\to a}{\sim} g$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \cancel{\Longrightarrow} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ mais $\mathrm{e}^x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} x$.
- $\lim\limits_{x\to0} x^2 = \lim\limits_{x\to0} x = 0$ mais $x^2 \cancel{\underset{x\to0}{\sim}} x$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ mais $2^n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} n$.

ATTENTION

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \cancel{\Longrightarrow} f \underset{x\to a}{\sim} g$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \cancel{\Longrightarrow} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ mais $\mathrm{e}^x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} x$.
- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ mais $x^2 \cancel{\underset{x\to 0}{\sim}} x$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ mais $2^n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} n$.

De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ mais, en général, $u_{n+1} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \text{ mais } 2^{n+1} = 2\times 2^n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} 2^n.$$

En utilisant ce que l'on sait sur les limites, on a mieux que la proposition (1) :

Théorème 23 (Conservation du signe) :

Fonctions : Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe dans un voisinage de a.

En utilisant ce que l'on sait sur les limites, on a mieux que la proposition (1) :

Théorème 23 (Conservation du signe) :

Fonctions : Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe dans un voisinage de a.

Suites : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont du même signe à partir d'un certain rang.

En utilisant ce que l'on sait sur les limites, on a mieux que la proposition (1) :

Théorème 23 (Conservation du signe) :

Fonctions : Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe dans un voisinage de a.

Suites : Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont du même signe à partir d'un certain rang.

ATTENTION

Cela ne signifie pas qu'à partir du rang n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de signe constant ! Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

En utilisant ce que l'on sait sur les limites, on a mieux que la proposition (1) :

Théorème 23 (Conservation du signe) :

Fonctions : Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe dans un voisinage de a.

Suites : Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont du même signe à partir d'un certain rang.

ATTENTION

Cela ne signifie pas qu'à partir du rang n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de signe constant ! Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

On peut faire un peu mieux, et obtenir une conservation stricte : « il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, u_n et v_n sont soit tous les deux nuls, soit strictement de même signe.

III. Équivalence

2. Application : Série harmonique et constante d'Euler

Théorème 24 (Développement asymptotique de la série harmonique) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}\left(1\right), \qquad \text{où } \gamma \simeq 0,5772156649\ldots.$$

Théorème 24 (Développement asymptotique de la série harmonique) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}\,(1)\,, \qquad \text{où } \gamma \simeq 0,5772156649\ldots.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Théorème 25 (Petit o et équivalence II) :

Fonctions : $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ et $g \underset{x \to a}{\sim} h$ alors $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$.

Théorème 25 (Petit o et équivalence II) :

Fonctions : $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ et $g \underset{x\to a}{\sim} h$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$.

Suites : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n)$.

Théorème 25 (Petit o et équivalence II) :

Fonctions : $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ et $g \underset{x \to a}{\sim} h$ alors $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\,(h)$.

Suites : $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(w_n)$.

Exemple 20 :

Comme $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ et $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ alors :

$$\sin\left(\mathrm{e}^x - 1\right) \underset{x \to 0}{\sim} \sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances **) :**

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $h \underset{x\to a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$.

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $h \underset{x\to a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$.
2. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $h \underset{x\to a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$.
2. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
3. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $f^{\alpha} \underset{x\to a}{\sim} g^{\alpha}$.

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $h \underset{x\to a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$.
2. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
3. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$.

Suites :

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances **) :**

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $h \underset{x\to a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$.
2. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
3. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$.

Suites :

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ alors, soit $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$.

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $h \underset{x\to a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$.
2. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
3. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$.

Suites :

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ alors, soit $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.

Théorème 26 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $h \underset{x\to a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$.
2. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
3. Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$.

Suites :

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ alors, soit $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Théorème 27 (Les équivalents sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I.
Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$ alors $f\circ\varphi \underset{x\to b}{\sim} g\circ\varphi$.

Théorème 27 (Les équivalents sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I.
Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$ alors $f\circ\varphi \underset{x\to b}{\sim} g\circ\varphi$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

ATTENTION

Avec les équivalents, deux opérations sont **formellement interdites** :

Somme : $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $3-x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1-x$ mais : $4 \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} 1$.

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

Solution : Pousser les développements limités.

ATTENTION

Avec les équivalents, deux opérations sont **formellement interdites** :

Somme : $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $3-x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1-x$ mais : $4 \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} 1$.

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

Solution : Pousser les développements limités.

Composition à gauche : $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+\ln(n)$, mais, si on compose par $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ à gauche $\mathrm{e}^n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} n\,\mathrm{e}^n$.

En général, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$. Même avec des fonctions « gentilles » comme le logarithme ou l'exponentielle, cela peut être faux.

Méthode 4 :

- Étudier les négligeabilité entre les termes de la somme pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.

Méthode 4 :

- Étudier les négligeabilité entre les termes de la somme pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.
- Écrire les équivalents avec un o et effectuer la somme sous cette forme.

Méthode 4 :

- Étudier les négligeabilité entre les termes de la somme pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.
- Écrire les équivalents avec un o et effectuer la somme sous cette forme.
    1. Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.

Méthode 4 :

- Étudier les négligeabilité entre les termes de la somme pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.
- Écrire les équivalents avec un o et effectuer la somme sous cette forme.
  1. Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.
  2. Sinon, on ne peut pas conclure directement. Il faut étudier l'ordre de grandeur de ce qu'il reste après simplification des parties principales, et pour cela, il faut avoir une meilleure approximation de chaque terme (la connaissance de l'équivalent ne suffit pas). On peut par exemple utiliser un développement limité.

Exemple 21 :

$$\sqrt{x^2+\ln(x)}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}-1\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ et $\sqrt{1+u}-1 \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}u$.

D'où $\sqrt{x^2+\ln(x)}-x \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\dfrac{\ln(x)}{2x^2}=\dfrac{\ln(x)}{2x}$.

Exemple 21 :

$$\sqrt{x^2+\ln(x)}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}-1\right).$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$ et $\sqrt{1+u}-1 \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}u$.

D'où $\sqrt{x^2+\ln(x)}-x \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\dfrac{\ln(x)}{2x^2}=\dfrac{\ln(x)}{2x}$.

Exercice 13 :

Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x^2)-\sin^2(x)$.

Exemple 21 :

$$\sqrt{x^2+\ln(x)}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}-1\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\sqrt{1+u}-1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u$.

D'où $\sqrt{x^2+\ln(x)}-x \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{\ln(x)}{2x^2} = \frac{\ln(x)}{2x}$.

Exercice 13 :

Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x^2)-\sin^2(x)$.

Exercice 14 :

Donner un équivalent en $+\infty$ de $\operatorname{ch}\left(\mathrm{e}^{-n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Méthode 5 :

Comment trouver un équivalent simple de $\ln(u_n)$?

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, utiliser l'équivalent classique.

Evidemment, cela s'adapte aux fonctions.

Méthode 5 :

Comment trouver un équivalent simple de $\ln(u_n)$?

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, utiliser l'équivalent classique.
2. Sinon, écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n(1+o(1))$, où v_n est un équivalent simple de u_n, puis $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(v_n) + \ln(1+o(1))$.
   Comparer ensuite les deux termes. Autrement dit, il s'agit de mettre le terme prépondérant en facteur dans le logarithme pour le sortir du logarithme.

Évidemment, cela s'adapte aux fonctions.

Méthode 5 :

Comment trouver un équivalent simple de $\ln(u_n)$?

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, utiliser l'équivalent classique.
2. Sinon, écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n(1+\mathrm{o}(1))$, où v_n est un équivalent simple de u_n puis $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(v_n) + \ln(1+\mathrm{o}(1))$.
   Comparer ensuite les deux termes. Autrement dit, il s'agit de mettre le terme prépondérant en facteur dans le logarithme pour le sortir du logarithme.

Évidemment, cela s'adapte aux fonctions.

Exercice 15 :

Trouver un équivalent de $\ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Méthode 6 :

Comment trouver un équivalent simple de e^{u_n} ?

Développer u_n à $o(1)$ près : $u_n = v_n + o(1)$.

Méthode 6 :

Comment trouver un équivalent simple de e^{u_n} ?

Développer u_n à $o(1)$ près : $u_n = v_n + o(1)$.

S'adapte aux fonctions.

Méthode 6 :

Comment trouver un équivalent simple de e^{u_n} ?

Développer u_n à $o(1)$ près : $u_n = v_n + o(1)$.

S'adapte aux fonctions.

Exercice 16 :

Trouver un équivalent en 0 de $\mathrm{e}^{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1+x)}$.

IV. Domination

Définition 4 (Domination) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que **f est dominée par g** au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g\right)$, si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et on lit :

« f est un grand O de g au voisinage de a ».

IV. Domination

1. Introduction

Définition 4 (Domination) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est dominée par g au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g\right)$, si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et on lit :

« f est un grand O de g au voisinage de a ».

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} (v_n)$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on lit :

« $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un grand O de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini ».

IV. Domination

1. Introduction

Définition 4 (Domination) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est dominée par g au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g\right)$, si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et on lit :

« f est un grand O de g au voisinage de a ».

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} (v_n)$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on lit :

« $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un grand O de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini ».

En particulier, pour les fonctions, un $\mathrm{O}\left(1\right)$ est une fonction bornée au voisinage de a et, pour les suites, un $\mathrm{O}\left(1\right)$ est une suite bornée.

Exemples 22 :

- $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.

IV. Domination

1. Introduction

Exemples 22 :

- $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.
- $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.

IV. Domination
1. Introduction

Exemples 22 :

- $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.
- $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.
- $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exemples 22 :

- $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.
- $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.
- $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- $\lfloor \mathrm{e}^n \rfloor \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^n\right)$.

IV. Domination
1. Introduction

Proposition 28 (Domination, définition équivalente) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f **est dominée par** g au voisinage de a s'il existe un réel positif M tel que, dans un voisinage de a, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}|g(x)|$.

IV. Domination

1. Introduction

Proposition 28 (Domination, définition équivalente) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f **est dominée par** g au voisinage de a s'il existe un réel positif M tel que, dans un voisinage de a, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}|g(x)|$.

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est dominée par** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un réel positif M rel que, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}|v_n|$.

Proposition 28 (Domination, définition équivalente) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f **est dominée par** g au voisinage de a s'il existe un réel positif M tel que, dans un voisinage de a, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}|g(x)|$.

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est dominée par** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un réel positif M rel que, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}|v_n|$.

Autrement dit, une suite ou une fonction est dominée si son ordre de grandeur ne dépasse pas celle de sa dominante à une constante multiplicative près.

IV. Domination
1. Introduction

Proposition 29 (Grand O, petit o et équivalence) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ ou $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}\,(g)$.

IV. Domination
1. Introduction

Proposition 29 (Grand O, petit o et équivalence) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(g)$ ou $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}\,(g)$.

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\,(v_n)$.

Proposition 29 (Grand O, petit o et équivalence) :

Fonctions : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{\mathrm{I}}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.
Si $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ ou $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}\left(g\right)$.

Suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$.

ATTENTION

La domination n'implique ni la négligeabilité ni l'équivalence. C'est le contraire qui est vrai.

Par exemple, $2x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(x^2\right)$ mais $2x^2 \cancel{\underset{x\to+\infty}{=}} \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et

$2x^2 \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} x^2$.

IV. Domination

1. Introduction

Exemples 23 :

- Comme $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ alors $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{O}\left(x^3\right)$.
  Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 2, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 3.

Exemples 23 :

- Comme $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ alors $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{O}\left(x^3\right)$.
  Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 2, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 3.
- De même, $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ entraîne $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \mathrm{O}\left(x^2\right)$.
  Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 1, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 2.

Les propriétés et leur démonstration sont quasi-identiques à celles exposées dans les paragraphes précédents. On les résume ici :

À retenir :

Les théorèmes sur les petits o sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,

IV. Domination
1. Introduction

Les propriétés et leur démonstration sont quasi-identiques à celles exposées dans les paragraphes précédents. On les résume ici :

À retenir :

Les théorèmes sur les petits o sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,
- la somme de deux grands O est un grand O,

IV. Domination
1. Introduction

Les propriétés et leur démonstration sont quasi-identiques à celles exposées dans les paragraphes précédents. On les résume ici :

À retenir :

Les théorèmes sur les petits o sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,
- la somme de deux grands O est un grand O,
- un grand O d'un grand O est un grand O,

IV. Domination

1. Introduction

Les propriétés et leur démonstration sont quasi-identiques à celles exposées dans les paragraphes précédents. On les résume ici :

À retenir :

Les théorèmes sur les petits o sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,
- la somme de deux grands O est un grand O,
- un grand O d'un grand O est un grand O,
- avec le produit, tout va bien,

Les propriétés et leur démonstration sont quasi-identiques à celles exposées dans les paragraphes précédents. On les résume ici :

À retenir :

Les théorèmes sur les petits o sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,
- la somme de deux grands O est un grand O,
- un grand O d'un grand O est un grand O,
- avec le produit, tout va bien,
- avec la composition **à droite** et les suites extraites, tout va bien.

Derniers commentaires :

- De même que pour la relation de négligeabilité, à part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination se comporte à peu près comme une relation d'ordre **large**.

IV. Domination
1. Introduction

Derniers commentaires :

- De même que pour la relation de négligeabilité, à part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination se comporte à peu près comme une relation d'ordre **large**.
- On se sert souvent des o et O pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant $u_n - \ell$.
  On compare ainsi souvent la différence $u_n - \ell$ à une suite de référence de limite nulle, ou u_n à une suite de référence de limite $+\infty$.

Derniers commentaires :

- De même que pour la relation de négligeabilité, à part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination se comporte à peu près comme une relation d'ordre **large**.
- On se sert souvent des o et O pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant $u_n - \ell$.
  On compare ainsi souvent la différence $u_n - \ell$ à une suite de référence de limite nulle, ou u_n à une suite de référence de limite $+\infty$.

Derniers commentaires :

- De même que pour la relation de négligeabilité, à part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination se comporte à peu près comme une relation d'ordre **large**.
- On se sert souvent des o et O pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant $u_n - \ell$.
  On compare ainsi souvent la différence $u_n - \ell$ à une suite de référence de limite nulle, ou u_n à une suite de référence de limite $+\infty$.

  Par exemple, une suite telle que $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$ aura une convergence rapide (exponentielle), alors que l'information $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ ne permettra pas de contrôler aussi bien la convergence bien qu'une telle égalité n'empêchera pas que la convergence puisse être rapide.

V. Exemples et Applications

Exercice 17 :

Donner un équivalent en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{3-2x}.$$

Exercice 18 :

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

V. Exemples et Applications

3. Position locale d'une fonction par rapport à une tangente

L'étude locale d'une fonction consiste à déterminer pour cette fonction l'existence d'une tangente ou d'une asymptote, et de donner la position relative de la droite et de la courbe dans le voisinage considéré.

V. Exemples et Applications

3. Position locale d'une fonction par rapport à une tangente

L'étude locale d'une fonction consiste à déterminer pour cette fonction l'existence d'une tangente ou d'une asymptote, et de donner la position relative de la droite et de la courbe dans le voisinage considéré.

Ainsi, pour l'étude d'une fonction au voisinage de 0, un DL à l'ordre 2 donnera l'équation de la tangente et la position relative via le signe du terme d'ordre 2 (éventuellement d'ordre 3 si celui d'ordre 2 s'annule).

Plus précisément :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

Si f admet, au voisinage de a, un développement limité de la forme :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + (x-a)a_1 + a_p(x-a)^p + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right),$$

où p est donc le plus petit indice supérieur ou égal à 2 tel que $a_p \neq 0$, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

On a alors $f(x) - \Big(f(a) - f'(a)(x-a)\Big) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right)$ *i.e.*

La courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ comme tangente au point a.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + (x-a)a_1 + a_p(x-a)^p + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right).$$

On a mieux : la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du **signe** de la fonction $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

1. Si p est pair, $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ est du signe **constant** de a_p.
   Le graphe de f est donc situé soit au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a soit au-dessous suivant le signe de a_p.
   De plus, si $a_1 = 0$ alors $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a *i.e.* f possède un extremum local en a : maximum local si $a_p < 0$, minimum local si $a_p > 0$.

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + (x-a)a_1 + a_p(x-a)^p + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right).$$

On a mieux : la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du **signe** de la fonction $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

1. Si p est pair, $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ est du signe **constant** de a_p.
   Le graphe de f est donc situé soit au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a soit au-dessous suivant le signe de a_p.
   De plus, si $a_1 = 0$ alors $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a *i.e.* f possède un extremum local en a : maximum local si $a_p < 0$, minimum local si $a_p > 0$.
2. Si p est impair, $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ change de signe en a, donc le graphe de f traverse sa tangente en a : on dit que f possède en a un point d'inflexion.l

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + (x-a)a_1 + a_p(x-a)^p + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right).$$

On a mieux : la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du **signe** de la fonction $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

1. Si p est pair, $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ est du signe **constant** de a_p.
   Le graphe de f est donc situé soit au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a soit au-dessous suivant le signe de a_p.
   De plus, si $a_1 = 0$ alors $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a *i.e.* f possède un extremum local en a : maximum local si $a_p < 0$, minimum local si $a_p > 0$.
2. Si p est impair, $x \longmapsto a_p(x-a)^p$ change de signe en a, donc le graphe de f traverse sa tangente en a : on dit que f possède en a un point d'inflexion.l

Exemple 24 :

Comme $\dfrac{x \sin x}{1+x^2} \underset{x \to 0}{\sim} x^2$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{x \sin x}{1+x^2}$ vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, sa courbe représentative admet l'axe des abscisses comme tangente en 0 et f reste positive au voisinage de 0 donc possède un minimum local en 0.

Exercice 19 :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1-2x)}{1+x}$.

1. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.

Exercice 19 :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1-2x)}{1+x}$.

1. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.
2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 et que f y possède un point d'inflexion.

On peut également définir des « développements limités » en la variable x au voisinage de $+\infty$. On se ramène alors à 0 par un changement de variables $h = \dfrac{1}{x}$ et on parle plutôt dans ce cas de développement asymptotique.

Exemple 25 :

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

V. Exemples et Applications

4. Développement asymptotique

Un développement limité permet de comparer localement au voisinage d'un point a une fonction à une fonction polynomiale, donc à situer la fonction sur une échelle de comparaison constituée de fonctions $x \longmapsto (x-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

V. Exemples et Applications

4. Développement asymptotique

Un développement limité permet de comparer localement au voisinage d'un point a une fonction à une fonction polynomiale, donc à situer la fonction sur une échelle de comparaison constituée de fonctions $x \longmapsto (x-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas de fonctions **non bornées** au voisinage d'un point a, on peut être amené à introduire des puissances négatives de $(x-a)$, afin de mesurer la divergence locale.

On parlera là encore de développement asymptotique d'ordre n pour une approximation du type :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=-n_0}^{n} a_k (x-a)^k \\ &\underset{x\to a}{=} \frac{a_{-n_0}}{(x-a)^{n_0}} + \frac{a_{-n_0+1}}{(x-a)^{n_0-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{x-a} + a_0 + \dots + a_n (x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \end{aligned}$$

Dans le cas de fonctions **non bornées** au voisinage d'un point a, on peut être amené à introduire des puissances négatives de $(x-a)$, afin de mesurer la divergence locale.

On parlera là encore de développement asymptotique d'ordre n pour une approximation du type :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=-n_0}^{n} a_k(x-a)^k \\ &\underset{x\to a}{=} \frac{a_{-n_0}}{(x-a)^{n_0}} + \frac{a_{-n_0+1}}{(x-a)^{n_0-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{x-a} + a_0 + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \end{aligned}$$

Exemple 26 :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{300}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

V. Exemples et Applications

4. Développement asymptotique

Dans le cas de fonctions **non bornées** au voisinage d'un point a, on peut être amené à introduire des puissances négatives de $(x-a)$, afin de mesurer la divergence locale.

On parlera là encore de développement asymptotique d'ordre n pour une approximation du type :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=-n_0}^{n} a_k (x-a)^k \\ &\underset{x\to a}{=} \frac{a_{-n_0}}{(x-a)^{n_0}} + \frac{a_{-n_0+1}}{(x-a)^{n_0-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{x-a} + a_0 + \ldots + a_n (x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \end{aligned}$$

Exemple 26 :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{300} x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

ATTENTION

Si f a un développement asymptotique commençant par un terme de degré $-k$, pour obtenir un DL à l'ordre n du produit fg, il faudra donc augmenter l'ordre du DL de g jusqu'à $n+k$.

V. Exemples et Applications
4. Développement asymptotique

Exercice 20 :

Montrer que $\dfrac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{2}{x} - 1 - \dfrac{1}{2}x + o(x)$.

Exercice 20 :

Montrer que $\dfrac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{2}{x} - 1 - \dfrac{1}{2}x + o\,(x)$.

Exercice 21 :

Calculer le DA en $+\infty$ à l'ordre 5 de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Exercice 22 :

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Rappel (Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$) :

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $\pm\infty$.

On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$ si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} ax + b + \mathrm{o}\,(1)$.

Rappel (Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$) :

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $\pm\infty$.

On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$ si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} ax + b + \mathrm{o}\,(1)$.

En particulier, $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$.

Exemple 27 :

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 + \lfloor x \rfloor^2}{x^2+2}$.

Comme $\lfloor x \rfloor \underset{x\to\pm\infty}{=} x + \mathrm{O}\left(1\right)$ alors, par primitivation, $\lfloor x \rfloor^2 \underset{x\to\pm\infty}{=} x^2 + \mathrm{O}\left(x\right)$.

$$
\begin{aligned}
\text{D'où,}\quad f(x) &\underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{x^3 + x^2 + \mathrm{O}\left(x\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} \\
&\underset{x\to\pm\infty}{=} \left(x + 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + x + \mathrm{o}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

La courbe représentative de f admet donc la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote en $\pm\infty$.

Exercice 23 :

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x}\,\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation et la position par rapport à la courbe.