Dénombrements

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 22

Sommaire I

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main.

Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un évènement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

À l'école, en algèbre, j'étais du genre Einstein. Mais plutôt Franck qu'Albert.

Philippe Geluck

I. Généralités sur les ensembles finis

Définition 1 :

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments.

On note dans ce cas $\mathrm{card}\,(\mathrm{E})$ ou $|\mathrm{E}|$ le cardinal de E.

I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Définition 1 :

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments.

On note dans ce cas $\operatorname{card}(E)$ ou $|E|$ le cardinal de E.

Exemple 1 :

$\operatorname{card}(\varnothing) = 0$ et $\operatorname{card}(\{\varnothing\}) = 1$.

Définition 1 :

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments.

On note dans ce cas $\text{card}\,(E)$ ou $|E|$ le cardinal de E.

Exemple 1 :

$\text{card}\,(\varnothing) = 0$ et $\text{card}\,(\{\varnothing\}) = 1$.

On peut définir, comme on le verra plus tard, une notion de cardinal pour des ensembles infinis, mais l'intuition en est moins évidente. Par exemple, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ ont même cardinal !

Intuitivement, un ensemble fini $\mathbb{E}$ de cardinal n est un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i décrivent $\mathbb{E}$ et sont deux à deux distincts.

En interprétant ceci avec l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$,

- le fait que les x_i décrivent $\mathbb{E}$ signifie que φ est surjective,

I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Intuitivement, un ensemble fini $\mathbb{E}$ de cardinal n est un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i décrivent $\mathbb{E}$ et sont deux à deux distincts.

En interprétant ceci avec l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$,

- le fait que les x_i décrivent $\mathbb{E}$ signifie que φ est surjective,
- le fait que les x_i soient deux à deux distincts, signifie que φ est injective.

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est fini s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son cardinal est nul noté $\operatorname{card}(\mathbb{E}) = 0$.

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est fini s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son cardinal est nul noté $\text{card}\,(\mathbb{E}) = 0$.
- $\mathbb{E}$ est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$, auquel cas on dit que son cardinal est n noté $\text{card}\,(\mathbb{E}) = n$.

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est fini s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son cardinal est nul noté $\operatorname{card}(\mathbb{E}) = 0$.
- $\mathbb{E}$ est en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$, auquel cas on dit que son cardinal est n noté $\operatorname{card}(\mathbb{E}) = n$.

Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{E}$ est infini.

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est fini s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son cardinal est nul noté $\operatorname{card}(\mathbb{E}) = 0$.
- $\mathbb{E}$ est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$, auquel cas on dit que son cardinal est n noté $\operatorname{card}(\mathbb{E}) = n$.

Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{E}$ est infini.

Remarque : Si les ensembles $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, m\}$ sont en bijection, alors $n = m$. Le cardinal d'un ensemble fini $\mathbb{E}$ est donc bien défini. Il indique le nombre d'éléments de $\mathbb{E}$.

Exemples 2 :

- $[\![p\,;q]\!]$ est fini de cardinal $q-p+1$.
  Il suffit de prendre pour φ, l'injection canonique :

$$i: \begin{array}{ccc} [\![1\,;q-p+1]\!] & \longrightarrow & [\![p\,;q]\!] \\ i & \longmapsto & p-1+i \end{array}.$$

Exemples 2 :

- $[\![p\,;q]\!]$ est fini de cardinal $q-p+1$.
  Il suffit de prendre pour φ, l'injection canonique :

$$i: \begin{array}{ccc} [\![1\,;q-p+1]\!] & \longrightarrow & [\![p\,;q]\!] \\ i & \longmapsto & p-1+i \end{array}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
  L'application $i: \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ k & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \end{array}$ est bijective, donc $\mathbb{U}_n$ est fini et $\operatorname{card}(\mathbb{U}_n) = n$.

Exemples 2 :

- $[\![p\,;q]\!]$ est fini de cardinal $q-p+1$.
  Il suffit de prendre pour φ, l'injection canonique :
  $$i: \begin{array}{ccc} [\![1\,;q-p+1]\!] & \longrightarrow & [\![p\,;q]\!] \\ i & \longmapsto & p-1+i \end{array}.$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
  L'application $i: \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ k & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \end{array}$ est bijective, donc $\mathbb{U}_n$ est fini et $\operatorname{card}(\mathbb{U}_n) = n$.
- Si $\mathbb{F}$ est un sous-ensemble d'un ensemble fini $\mathbb{E}$ et si $\mathbb{1}_{\mathbb{F}}$ est sa fonction caractéristique, on a :
  $$\operatorname{card}(\mathbb{F}) = \sum_{x\in\mathbb{E}} \mathbb{1}_{\mathbb{F}}(x). \qquad (1)$$

Proposition 1 (Cas particulier d'un sous-ensemble) :

Soient $\mathbb{E}$ un ensemble fini et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$.

Alors :

- $\mathbb{F}$ est finie, et $\operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E})$.

Proposition 1 (Cas particulier d'un sous-ensemble) :

Soient $\mathbb{E}$ un ensemble fini et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$.

Alors :

- $\mathbb{F}$ est finie, et $\operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E})$.
- De plus, si $\operatorname{card}(\mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E})$ alors $\mathbb{F} = \mathbb{E}$.

Proposition 1 (Cas particulier d'un sous-ensemble) :

Soient $\mathbb{E}$ un ensemble fini et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$.

Alors :

- $\mathbb{F}$ est finie, et $\operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E})$.
- De plus, si $\operatorname{card}(\mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E})$ alors $\mathbb{F} = \mathbb{E}$.

Remarques : Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux ensembles de même cardinaux, il suffit de montrer une inclusion pour avoir l'égalité.

Théorème 2 (Effet d'une application sur le cardinal) :

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application.

1. Si f est bijective, alors :

$$\mathbb{E} \text{ est fini de cardinal } n \iff \mathbb{F} \text{ est fini de cardinal } n \text{ et on a}$$
$$\operatorname{card}(\mathbb{E}) = \operatorname{card}(\mathbb{F})$$

Théorème 2 (Effet d'une application sur le cardinal) :

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application.

1. Si f est bijective, alors :
$$\mathbb{E} \text{ est fini de cardinal } n \iff \mathbb{F} \text{ est fini de cardinal } n \text{ et on a } \operatorname{card}(\mathbb{E}) = \operatorname{card}(\mathbb{F})$$

2. Si f est injective, alors :
$$\mathbb{F} \text{ est fini} \implies \mathbb{E} \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathbb{E}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{F}).$$

Théorème 2 (Effet d'une application sur le cardinal) :

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application.

1. Si f est bijective, alors :
$$\mathbb{E} \text{ est fini de cardinal } n \iff \mathbb{F} \text{ est fini de cardinal } n \text{ et on a } \operatorname{card}(\mathbb{E}) = \operatorname{card}(\mathbb{F})$$

2. Si f est injective, alors :
$$\mathbb{F} \text{ est fini} \implies \mathbb{E} \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathbb{E}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{F}).$$

3. Si f est surjective, alors :
$$\mathbb{E} \text{ est fini} \implies \mathbb{F} \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E}).$$

- Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f, $\mathbb{E}$ couvre $\mathbb{F}$ en totalité. Une telle couverture n'est possible que si $\mathbb{E}$ est « plus gros » que $\mathbb{F}$ *i.e.* si

$$\operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E}) \qquad \text{- assertion (3).}$$

- Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f, $\mathbb{E}$ couvre $\mathbb{F}$ en totalité. Une telle couverture n'est possible que si $\mathbb{E}$ est « plus gros » que $\mathbb{F}$ *i.e.* si

$$\operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E}) \qquad \text{- assertion (3).}$$

- Dire que f est injective, c'est dire que deux points distincts de $\mathbb{E}$ sont envoyés par f sur deux points distincts de $\mathbb{F}$, *i.e.* que $f(\mathbb{E})$ est comme une copie de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.
Une telle copie n'est possible que si $\mathbb{F}$ est « plus gros » que $\mathbb{E}$ *i.e.* si :

$$\operatorname{card}(\mathbb{E}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{F}) \qquad \text{- assertion (2).}$$

- Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f, $\mathbb{E}$ couvre $\mathbb{F}$ en totalité. Une telle couverture n'est possible que si $\mathbb{E}$ est « plus gros » que $\mathbb{F}$ *i.e.* si

$$\mathrm{card}\,(\mathbb{F}) \leqslant \mathrm{card}\,(\mathbb{E}) \quad \text{- assertion } (3).$$

- Dire que f est injective, c'est dire que deux points distincts de $\mathbb{E}$ sont envoyés par f sur deux points distincts de $\mathbb{F}$, *i.e.* que $f(\mathbb{E})$ est comme une copie de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.
  Une telle copie n'est possible que si $\mathbb{F}$ est « plus gros » que $\mathbb{E}$ *i.e.* si :

$$\mathrm{card}\,(\mathbb{E}) \leqslant \mathrm{card}\,(\mathbb{F}) \quad \text{- assertion } (2).$$

- Conséquence, une application d'un ensemble fini dans un autre dont le cardinal est strictement inférieur au premier, ne peut pas être injective : il existe donc nécessairement deux éléments qui ont la même image.
  C'est ce que l'on appelle familièrement le « principe des tiroirs de Dirichlet » :

Si on range p chaussettes dans n tiroirs et que $n < p$, il existe au moins deux chaussettes qui sont dans le même tiroir.

Exercice 1 :

Étant donnés 5 points dans un carré d'arête 2, montrer qu'on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.

Théorème 3 :

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles de même cardinal n et une application $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$.

On alors les équivalences suivantes :

1. f est bijective.

Théorème 3 :

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles de même cardinal n et une application $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$.

On alors les équivalences suivantes :

1. f est bijective.
2. f est injective.

Théorème 3 :

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles de même cardinal n et une application $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$.

On alors les équivalences suivantes :

1. f est bijective.
2. f est injective.
3. f est surjective.

Proposition 4 (Cardinal d'une réunion, d'une différence) :

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles finis. Alors $\mathbb{E} \cup \mathbb{F}$ est un ensemble fini et on a :

Réunion : $\operatorname{card}(\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E}) + \operatorname{card}(\mathbb{F}) - \operatorname{card}(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$.
En particulier, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont disjoints, on a :

$$\operatorname{card}(\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E}) + \operatorname{card}(\mathbb{F}).$$

Proposition 4 (Cardinal d'une réunion, d'une différence) :

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles finis. Alors $\mathbb{E} \cup \mathbb{F}$ est un ensemble fini et on a :

Réunion : $\operatorname{card}(\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E}) + \operatorname{card}(\mathbb{F}) - \operatorname{card}(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$.
En particulier, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont disjoints, on a :

$$\operatorname{card}(\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E}) + \operatorname{card}(\mathbb{F}).$$

Différence : $\operatorname{card}(\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E}) - \operatorname{card}(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$.
En particulier, si $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$,
$\operatorname{card}\left(\overline{\mathbb{F}}\right) = \operatorname{card}(\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E}) - \operatorname{card}(\mathbb{F})$.

Lorsque les ensembles A_1, ..., A_n sont disjoints de même cardinal, la formule :

$$\mathrm{card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{card}\,(A_i)\,,$$

porte le joli nom de principe des bergers en référence au berger désireux de compter le nombre de ses moutons en ne pouvant compter que leurs pattes.

Lorsque les ensembles A_1, ..., A_n sont disjoints de même cardinal, la formule :

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}\left(\mathrm{A}_i\right),$$

porte le joli nom de principe des bergers en référence au berger désireux de compter le nombre de ses moutons en ne pouvant compter que leurs pattes.

Théorème 5 (Principe des bergers) :

Toute réunion DISJOINTE de n ensembles de même cardinal p
est un ensemble de cardinal np.

Lorsque les ensembles A_1, ..., A_n sont disjoints de même cardinal, la formule :

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i),$$

porte le joli nom de principe des bergers en référence au berger désireux de compter le nombre de ses moutons en ne pouvant compter que leurs pattes.

Théorème 5 (Principe des bergers) :

Toute réunion DISJOINTE de n ensembles de même cardinal p est un ensemble de cardinal np.

Tout ça pour dire qu'un berger qui possède n moutons possède aussi $4n$ pattes de moutons !

Exemple 3 :

Nous avons utilisé le principe des bergers sans le dire quand nous avons calculé $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

Un tableau de taille $n \times p$ contient n lignes et chaque ligne contient p cases, donc un tel tableau contient np cases !

Exemple 3 :

Nous avons utilisé le principe des bergers sans le dire quand nous avons calculé $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

Un tableau de taille $n \times p$ contient n lignes et chaque ligne contient p cases, donc un tel tableau contient np cases !

Exercice 2 :

À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Proposition 6 (Cardinal d'un produit) :

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles finis. Alors $\mathbb{E} \times \mathbb{F} = \{\, (x\,;y)\,,\ x \in \mathbb{E} \text{ et } y \in \mathbb{F}\}$ est fini et on a :

$$\operatorname{card}(\mathbb{E} \times \mathbb{F}) = \operatorname{card}(\mathbb{E}) \times \operatorname{card}(\mathbb{F})\,.$$

Proposition 6 (Cardinal d'un produit) :

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles finis. Alors $\mathbb{E} \times \mathbb{F} = \{ (x\,;y)\,,\ x \in \mathbb{E} \text{ et } y \in \mathbb{F} \}$ est fini et on a :

$$\text{card}\,(\mathbb{E} \times \mathbb{F}) = \text{card}\,(\mathbb{E}) \times \text{card}\,(\mathbb{F})\,.$$

Cette proposition se généralise immédiatement par récurrence :

Corollaire 6.1 :

Si $\mathbb{E}_1$, ..., $\mathbb{E}_p$ sont des ensembles finis, alors $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_p$ est fini et

$$\text{card}\left(\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_p\right) = \text{card}\,(\mathbb{E}_1) \times \text{card}\,(\mathbb{E}_2) \times \ldots \times \text{card}\left(\mathbb{E}_p\right).$$

En particulier si $\mathbb{E}$ est un ensemble fini, $\mathbb{E}^p$ est fini de cardinal $(\text{card}\,(\mathbb{E}))^p$, $p \geqslant 1$.

II. Dénombrements

II. Dénombrements

Il y trois sortes de gens :

1. *ceux qui savent compter et*

II. Dénombrements

Il y trois sortes de gens :

1. *ceux qui savent compter et*
2. *ceux qui ne savent pas !*

II. Dénombrements
1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

II. Dénombrements
1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?

II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?
- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?

II. Dénombrements
1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?
- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?
- Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$?

II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?
- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?
- Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$?
- Combien un ensemble fini de cardinal n possède-t-il de parties ?

II. Dénombrements
1. Introduction

Chacune de ces questions requiert, certes, un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens.

II. Dénombrements

1. Introduction

Chacune de ces questions requiert, certes, un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens.

Pour savoir de combien de façons on peut asseoir n personnes sur un banc rectiligne, imaginez-vous concrètement en train d'asseoir ces personnes et demandez-vous combien de choix cela vous laisse. Notre règle d'or dans ce chapitre sera ainsi la suivante :

COMPTER, C'EST ENUMERER/CONSTRUIRE.

Chacune de ces questions requiert, certes, un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens.

Pour savoir de combien de façons on peut asseoir n personnes sur un banc rectiligne, imaginez-vous concrètement en train d'asseoir ces personnes et demandez-vous combien de choix cela vous laisse. Notre règle d'or dans ce chapitre sera ainsi la suivante :

COMPTER, C'EST ENUMERER/CONSTRUIRE.

Énumérer, c'est ordonner selon un principe de classement RÉFLÉCHI.

Exemple 4 :

Pour énumérer les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on les lit généralement en colonnes de gauche à droite et du haut vers le bas - ce choix est bien sûr tout à fait conventionnel !

$$a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1p},\ a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2p},\ a_{n1},\ \ldots,\ a_{np}.$$

II. Dénombrements
1. Introduction

Exemple 5 :

Combien l'ensemble $[\![1\,;4]\!]$ a-t-il de parties ?

La réponse est 16.

Énumération lexicographique en fonction du cardinal : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.

Exemple 5 :

Combien l'ensemble $[\![1\,;4]\!]$ a-t-il de parties ?

La réponse est 16.

Énumération lexicographique en fonction du cardinal : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.

Énumération lexicographique après représentation par des mots : On peut associer bijectivement à toute partie A de $[\![1\,;4]\!]$ un et un seul mot de 4 lettres sur l'alphabet $\{0,1\}$.

De quelle manière ? La première lettre de ce mot est un « 1 » si $1 \in \mathrm{A}$ et un « 0 » sinon, la deuxième lettre est un « 1 » si $2 \in \mathrm{A}$ et un « 0 » sinon, ...

Par exemple, $\varnothing$ est représenté par 0000, $\{2\}$ par 0100, $\{2,3\}$ par 0110 et $[\![1\,;4]\!]$ par 1111.

Ainsi représentées, les parties de $[\![1\,;4]\!]$ sont faciles à énumérer lexicographiquement :

0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110, 0001,
1001, 0101, 1101, 0011, 1011, 0111, 1111.

Définition 3 (p-liste) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle ***p*-liste** de $\mathbb{E}$ tout p-uplet d'éléments de $\mathbb{E}$, c'est a dire un élément de $\mathbb{E}^p = \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \ldots \times \mathbb{E}$.

Définition 3 (p-liste) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle p-liste de $\mathbb{E}$ tout p-uplet d'éléments de $\mathbb{E}$, c'est a dire un élément de $\mathbb{E}^p = \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \ldots \times \mathbb{E}$.

ATTENTION

L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.

II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 3 (p-liste) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle *p-liste* de $\mathbb{E}$ tout p-uplet d'éléments de $\mathbb{E}$, c'est a dire un élément de $\mathbb{E}^p = \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \ldots \times \mathbb{E}$.

ATTENTION

L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.

Proposition 7 (Nombre de p-listes) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p-listes (ou p-uplets) de $\mathbb{E}$ est égal à n^p.

Définition 3 (p-liste) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle p-liste de $\mathbb{E}$ tout p-uplet d'éléments de $\mathbb{E}$, c'est a dire un élément de $\mathbb{E}^p = \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \ldots \times \mathbb{E}$.

Proposition 7 (Nombre de p-listes) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p-listes (ou p-uplets) de $\mathbb{E}$ est égal à n^p.

Dans une liste, l'ordre des éléments compte car une liste n'est jamais qu'une FAMILLE - et non pas un ensemble - et un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.

Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages SUCCESSIFS AVEC REMISE - avec remise car les répétitions sont autorisées.

Exercice 3 :

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Définition 4 (p-arrangement) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle p-arrangement de $\mathbb{E}$ toute p-liste de $\mathbb{E}$ d'éléments distincts.

Définition 4 (p-arrangement) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle p-arrangement de $\mathbb{E}$ toute p-liste de $\mathbb{E}$ d'éléments distincts.

Proposition 8 :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p-arrangements de $\mathbb{E}$ est égal à :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ si } p \leqslant n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Définition 4 (p-arrangement) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle p-arrangement de $\mathbb{E}$ toute p-liste de $\mathbb{E}$ d'éléments distincts.

Proposition 8 :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p-arrangements de $\mathbb{E}$ est égal à :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ si } p \leqslant n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages SUCCESSIFS SANS REMISE - sans remise car les répétitions sont interdites.

Exemples 6 :

- Il y a $\dfrac{40!}{35!}$ possibilités de tirer 5 boules numérotées entre 1 et 40 (en tenant compte de l'ordre).

Exemples 6 :

- Il y a $\dfrac{40!}{35!}$ possibilités de tirer 5 boules numérotées entre 1 et 40 (en tenant compte de l'ordre).
- Une course de chevaux comporte 20 partants. Le nombre de résultats possibles de tiercés dans l'ordre est $20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Exercice 4 :

De combien de façons peut-on asseoir n personnes :

1. sur un banc rectiligne ?

Exercice 4 :

De combien de façons peut-on asseoir n personnes :

1. sur un banc rectiligne ?
2. autour d'une table ronde ?

Théorème 9 (Nombres d'applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$) :

Soient $\mathbb{E}_p$ et $\mathbb{F}_n$ deux ensembles finis de cardinal respectif p et n.

Alors, l'ensemble des applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, noté $\mathcal{A}(\mathbb{E}\,;\mathbb{F})$, est fini et on a :

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{E}\,;\mathbb{F}\right)\right) = \operatorname{card}\left(\mathbb{F}\right)^{\operatorname{card}(\mathbb{E})} = n^p.$$

Théorème 9 (Nombres d'applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$) :

Soient $\mathbb{E}_p$ et $\mathbb{F}_n$ deux ensembles finis de cardinal respectif p et n.

Alors, l'ensemble des applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, noté $\mathcal{A}(\mathbb{E}\,;\mathbb{F})$, est fini et on a :

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}(\mathbb{E}\,;\mathbb{F})) = \operatorname{card}(\mathbb{F})^{\operatorname{card}(\mathbb{E})} = n^p.$$

Remarques :

- Une p-liste de $\mathbb{E}$ n'est jamais qu'une application de $[\![1\,;p]\!]$ dans $\mathbb{E}$.
- Réciproquement, la donnée d'une application f de $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ dans $\mathbb{F}$ est équivalente à la donnée de la p-liste $\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$ de $\mathbb{F}$.

Théorème 10 (Ensemble des parties) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{E}$.

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}(\mathbb{E})\right) = 2^n.$$

Théorème 10 (Ensemble des parties) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{E}$.

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}(\mathbb{E})\right) = 2^n.$$

Proposition 11 :

Soient $\mathbb{E}_p$ et $\mathbb{F}_n$ deux ensembles finis de cardinal respectif p et n.

$$\text{Le nombre d'injections } \mathbb{E} \text{ dans } \mathbb{F} \text{ est } \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Définition 5 ($\mathcal{S}(\mathbb{E})$) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n.

On appelle groupe des permutations de $\mathbb{E}$, noté $\mathcal{S}(\mathbb{E})$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{E}$.

Définition 5 ($\mathcal{S}(\mathbb{E})$) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n.

On appelle groupe des permutations de $\mathbb{E}$, noté $\mathcal{S}(\mathbb{E})$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{E}$.

Proposition 12 :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n.

$$\mathcal{S}(\mathbb{E}) \text{ est fini} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{card}(\mathcal{S}(\mathbb{E})) = n!.$$

Exercice 5 :

Soit $n \geqslant 3$. Combien y a-t-il de permutations de $[\![1\,;n]\!]$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 3 ?

Définition 6 (p-combinaison) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p-**combinaison** de $\mathbb{E}$ toute partie de $\mathbb{E}$ à p éléments.

On note $\mathcal{P}_p(\mathbb{E})$ leur ensemble.

Définition 6 (p-combinaison) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p-combinaison de $\mathbb{E}$ toute partie de $\mathbb{E}$ à p éléments.

On note $\mathcal{P}_p(\mathbb{E})$ leur ensemble.

Dans une combinaison, qui est un ENSEMBLE et non une famille, les éléments sont donnés sans ordre.

Quand on décide de numéroter les éléments d'une combinaison, le choix de la numérotation est totalement arbitraire, la combinaison en tant que telle n'a pas un premier élément, un deuxième élément, etc.

Définition 6 (p-combinaison) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p-combinaison de $\mathbb{E}$ toute partie de $\mathbb{E}$ à p éléments.

On note $\mathcal{P}_p(\mathbb{E})$ leur ensemble.

Dans une combinaison, qui est un ENSEMBLE et non une famille, les éléments sont donnés sans ordre.

Quand on décide de numéroter les éléments d'une combinaison, le choix de la numérotation est totalement arbitraire, la combinaison en tant que telle n'a pas un premier élément, un deuxième élément, etc.

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages SIMULTANÉS.

Théorème 13 (Nombre de combinaisons) :

Soient $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de parties de $\mathbb{E}$ de cardinal p (ou p-combinaisons de $\mathbb{E}$) est $\dbinom{n}{p}$:

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_p(\mathbb{E})\right) = \binom{n}{p}.$$

Théorème 13 (Nombre de combinaisons) :

Soient $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de parties de $\mathbb{E}$ de cardinal p (ou p-combinaisons de $\mathbb{E}$) est $\dbinom{n}{p}$:

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_p(\mathbb{E})\right) = \binom{n}{p}.$$

Exercice 6 :

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Corollaire 13.1 (k-listes strictement croissantes de $[\![1\,;n]\!]$) :

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, il existe $\dbinom{n}{k}$ familles d'entiers $(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_k)$ telles que :

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

Corollaire 13.2 (k-listes strictement croissantes de $[\![1\,;n]\!]$) :

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, il existe $\dbinom{n}{k}$ familles d'entiers $(i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_k)$ telles que :

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n.$$

Exercice 7 :

On appelle anagramme d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres avec multiplicité, mais dans un ordre quelconque.

Les mots « NOSSMOI » et « SIONSOM » sont par exemple deux anagrammes du mot « MOISSON ».

Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?

III. Retour sur les coefficients binomiaux

III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p-arrangements et les parties à p éléments :

- Pour les p-listes d'éléments distincts, soit les p-arrangements, on tient compte de l'ordre.

- Pour les p-listes d'éléments distincts, soit les p-arrangements, on tient compte de l'ordre.
- Pour les parties à p éléments, soit les p-combinaisons, aucun ordre pris en compte.

- Pour les p-listes d'éléments distincts, soit les p-arrangements, on tient compte de l'ordre.
- Pour les parties à p éléments, soit les p-combinaisons, aucun ordre pris en compte.

On utilise donc les combinaisons dans tous les problèmes de choix simultanés de p éléments distincts parmi n, sans considération d'ordre et sans répétition.

Exemple 7 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p-arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 7 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er}groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.

III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p-arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 7 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er}groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.
- Une fois le premier groupe de colles réalise, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants pour former le $2^{\text{ème}}$groupe : il y a $\binom{45}{3}$ choix.

III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p-arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 7 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er}groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.
- Une fois le premier groupe de colles réalise, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants pour former le $2^{\text{ème}}$groupe : il y a $\binom{45}{3}$ choix.
- Ainsi de suite, ...

III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p-arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 7 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er}groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.
- Une fois le premier groupe de colles réalise, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants pour former le $2^{\text{ème}}$groupe : il y a $\binom{45}{3}$ choix.
- Ainsi de suite, ...
- On compose le $16^{\text{ème}}$groupe : $\binom{3}{3}$ choix.

Exemple 7 :

On a ainsi :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times ... \times \binom{3}{3} = \prod_{i=1}^{16} \binom{3i}{3} = \prod_{i=1}^{16} \frac{(3i)!}{(3(i-1))!3!} = \frac{48!}{1!} \frac{1}{(3!)^{16}} = \frac{48!}{6^{16}} \text{ choix.}$$

Exemple 7 :

On a ainsi :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times ... \times \binom{3}{3} = \prod_{i=1}^{16} \binom{3i}{3} = \prod_{i=1}^{16} \frac{(3i)!}{(3(i-1))!3!} = \frac{48!}{1!}\frac{1}{(3!)^{16}} = \frac{48!}{6^{16}} \text{ choix.}$$

Mais on a construit des 16-arrangements de groupes de colles :$(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \dots, \mathrm{G}_{16})$ alors que ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \dots, \mathrm{G}_{16}\}$ de 16 groupes, sans ordre.

Exemple 7 :

On a ainsi :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times \ldots \times \binom{3}{3} = \prod_{i=1}^{16} \binom{3i}{3} = \prod_{i=1}^{16} \frac{(3i)!}{(3(i-1))!3!} = \frac{48!}{1!} \frac{1}{(3!)^{16}} = \frac{48!}{6^{16}} \text{ choix.}$$

Mais on a construit des 16-arrangements de groupes de colles :$(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_{16})$ alors que ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_{16}\}$ de 16 groupes, sans ordre.

Il faut donc diviser par 16!, nombre de façons de permuter $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_{16}$.

On obtient finalement $\dfrac{48!}{6^{16} \times 16!}$ choix.

Rappel :

Avec la convention $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

1. **Symétrie :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

Rappel :

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

1. **Symétrie :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour tout n, k de $\mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Rappel :

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

1. **Symétrie :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour tout n, k de $\mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
3. **Formule de Pascal :** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}.$$

Rappel :

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

1. **Symétrie :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour tout n, k de $\mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
3. **Formule de Pascal :** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}.$$

4. **Intégralité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Exercice 8 :

Soient n, N et M trois entiers tels que $n \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M}$.

Montrer la formule, dite de Vandermonde, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\mathrm{N}}{k} \binom{\mathrm{M}}{n-k} = \binom{\mathrm{N}+\mathrm{M}}{n}$.

Proposition 14 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a, $b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Proposition 14 (Formule du binôme de Newton) :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Proposition 15 :

Si $\mathbb{E}$ est un ensemble fini à n éléments, alors l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ des parties de $\mathbb{E}$ est fini de cardinal 2^n :

$$\text{card}\left(\mathcal{P}(\mathbb{E})\right) = 2^n.$$

Exercice 9 (Application aux problèmes de rangement avec ou sans répétition) :

Déterminer le nombre de façons de ranger p objets dans n boîtes numérotées de 1 à n :

1. sans répétition.

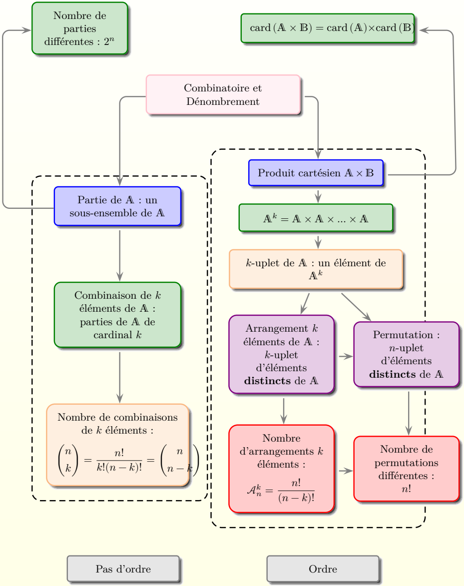
Exercice 9 (Application aux problèmes de rangement avec ou sans répétition) :

Déterminer le nombre de façons de ranger p objets dans n boîtes numérotées de 1 à n :

1. sans répétition.
2. avec répétition.

Bilan pratique

Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.



En pratique, un problème de dénombrement peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

En pratique, un problème de dénombrement peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Tirages successifs AVEC remise = Uplets	Tirages successifs SANS remise = Arrangements	Tirages SIMULTANÉS = Combinaisons