# Accroissements finis et Suites récurrentes

1 Soit $x \in \mathbb{R}$ :

$$g(x) \text{ existe } \iff \begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leqslant 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant \mathrm{e}^2, \end{cases}$$

donc $\boxed{\mathrm{D} = ]0; \mathrm{e}^2].}$

2 Comme $\ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, alors $2 - \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition,

$$\boxed{g(x) = \sqrt{2 - \ln x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.}$$

De même en $\mathrm{e}^2$ : $2 - \ln x \underset{x \to \mathrm{e}^2}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{g(x) \underset{x \to \mathrm{e}^2}{\longrightarrow} 0.}$

3 Si $x \in ]0; \mathrm{e}^2[$, alors $2 - \ln x > 0$ (même inéquation que précédemment, avec une inégalité stricte). Ainsi, $g$ est dérivable sur $]0; \mathrm{e}^2[$ comme racine carrée de $x \mapsto 2 - \ln x$ qui est dérivable (par somme) et strictement positive sur cet intervalle.

Comme $g'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 - \ln x}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2 - \ln x}} < 0$, on en déduit que $g$ est strictement décroissante sur I.

Commentaires :

- *Il est nettement meilleur de prouver la stricte décroissance par composition mais comme on a besoin de la dérivée plus loin, j'ai laissé ...*
- *Encore une fois, invoquer des composées de dérivées pour justifier la dérivabilité ne suffit pas si vous ne dites pas que la fonction composée est à valeurs dans le domaine de dérivabilité de la composante, ici $x \longmapsto \sqrt{x}$.*

Finalement :

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^2$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | $-$ | \|\| |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

4 Soit $x \in \mathrm{I}$. Par décroissance de $g$, on a $g(\mathrm{e}) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$ *i.e.* $1 \leqslant g(x) \leqslant \sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2} \leqslant \mathrm{e}$ (car $\sqrt{2} \leqslant 2 \leqslant \mathrm{e}$), on a bien $g(x) \in \mathrm{I}$, d'où $\boxed{g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}.}$

5 (a) Soient I un intervalle non trivial et $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

(i) $f$ est dérivable sur I,

(ii) il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$ sur I,

alors $f$ est M-lipschitzienne sur I.

(b) D'abord, $g$ est dérivable sur $]0; \mathrm{e}^2[$, donc sur I. Soit $x \in \mathrm{I}$.

On a vu que $g'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2 - \ln x}}$, donc $|g'(x)| = \dfrac{1}{2x\sqrt{2 - \ln x}}$.

D'une part, $\dfrac{1}{2x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ car $x \geqslant 1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \ln x \leqslant \ln \mathrm{e} = 1 \\ \text{donc} \quad & 2 - \ln x \geqslant 2 - 1 = 1 \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \qquad \left(\text{décroissance de } t \mapsto t^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Par produit d'inégalités à termes positifs, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

Finalement, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\boxed{g \text{ est } \frac{1}{2}\text{-lipschitzienne sur I.}}$

Commentaires : *Évitez les quotients dans vos expressions de la lipschitziannité.*

6 $h$ est dérivable sur D (somme de ln et d'un polynôme) et si $x \in \mathrm{D}$, $h'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ donc $h$ est strictement croissante sur D (rappelons que D est un **intervalle** !). On a aussi $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $h(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^4$, d'où :

| $x$ | $0$ | $\mathrm{e}^2$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $\Vert$ | $+$ |
| $h$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $\mathrm{e}^4$ |

Ainsi, $h$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle D (car $h' > 0$) donc d'après le théorème de la bijection, $h$ réalise une bijection de $\mathrm{D} = ]0; \mathrm{e}^2]$ sur l'intervalle $h(\mathrm{D}) = ]-\infty; \mathrm{e}^4]$.

Comme $0 \in ]-\infty; \mathrm{e}^4]$, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \mathrm{D}}$ tel que $\boxed{h(\alpha) = 0.}$

Or,

$$\begin{aligned} g(x) = x \iff \sqrt{2 - \ln x} = x & \iff 2 - \ln x = x^2 \qquad (\text{stricte croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ & \iff x^2 + \ln x - 2 = 0 \\ & \iff h(x) = 0, \end{aligned}$$

d'où $\boxed{g(\alpha) = \alpha}$ (et il n'y a pas d'autres points fixes de $g$, car on a procédé par équivalences ci-dessus).

Enfin, $h(1) = -1 < 0$ et $h(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 - 1 > 0$ donc par *stricte* croissance de $h$, $1 < \alpha < \mathrm{e}$, d'où $\boxed{\alpha \in \mathrm{I}.}$

7 On procède par récurrence. Soit $(\mathrm{P}_n)$ : « $x_n$ existe et $x_n \in \mathrm{I}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

*Initialisation.* Par hypothèse, $x_0 \in \mathrm{I}$ donc $(\mathrm{P}_0)$ est vraie.

*Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{P}_n)$ est vraie. Comme $x_n \in \mathrm{I}$ et que I est stable par $g$ (question 4), alors $g(x_n) = x_{n+1}$ existe et appartient à I, d'où $(\mathrm{P}_{n+1})$.

*Conclusion.* Par récurrence, $\boxed{\text{tous les termes } x_n \text{ existent et sont dans I}}$ c'est-à-dire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

8 D'après la question 5b, $g$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire :

$$\forall\ (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

Prenons $x = x_n \in \mathrm{I}$ et $y = \alpha \in \mathrm{I}$. Puisque $g(x_n) = x_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$, on obtient exactement :

$$\boxed{|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - \alpha|.}$$

9 ⓐ Définissons $(\mathrm{P}_n)$ : « $|x_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha|$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

*Initialisation.* $|x_0 - \alpha| = (\frac{1}{2})^0 |x_0 - \alpha|$ donc $(\mathrm{P}_0)$ est vraie.

*Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{P}_n)$ est vraie :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |x_n - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \qquad \text{(d'après } (\mathrm{P}_n)\text{)} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|, \end{aligned}$$

donc $(\mathrm{P}_{n+1})$ est vraie.

*Conclusion.* Par récurrence, $(\mathrm{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, puisque $x_0 \in \mathrm{I} = [1; \mathrm{e}]$ et $\alpha \in \mathrm{I}$, alors $|x_0 - \alpha| \leqslant \mathrm{e} - 1 \leqslant 2$, d'où :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

ⓑ Comme $\frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ (suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$), alors par domination $|x_n - \alpha| \to 0$, *i.e.* $\boxed{x_n \to \alpha.}$

10 On cherche N tel que $|x_\mathrm{N} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$, ce qui est assuré dès lors que $\frac{1}{2^{\mathrm{N}-1}} \leqslant 10^{-6}$, donc on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-6} &\iff 2^{n-1} \geqslant 10^6 && \text{(stricte décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\text{)} \\ &\iff (n-1)\log 2 \geqslant 6 && \text{(stricte croissance de log)} \\ &\iff n \geqslant 1 + \frac{6}{\log 2} \quad \text{(car } \log 2 > 0\text{).} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\boxed{\mathrm{N} = 1 + \left\lfloor 1 + \frac{6}{\log 2} \right\rfloor = 21.}$

11 Comme précédemment, $x_n$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-k}$ près dès que $|x_n - \alpha| \leqslant 10^{-k}$, ce qui est assuré dès que $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-k}$.

```python
from math import sqrt , log # pour utiliser les fonctions racine et ln

def valeur_approchee(k):
        n = 0 # initialisation du rang de la suite
        x_n = 1 # initialisation du premier terme de la suite
        while 1/2**(n-1) > 10**(-k): # on cherche le premier rang n
                                      #tel que 1/2**(n-1) <= 10**(-k)
                x_n = sqrt(2-log(x_n)) # mise à jour du terme de la suite
                n += 1 # mise à jour du rang
        return x_n # on renvoie la valeur approchée
                   #(et non le rang n, attention)
```

Commentaires : *On ne vous demandait pas un programme de dichotomie ou un autre quelconque d'approximation de points fixes mais un en accord avec l'exercice s'appuyant sur le résultat de la question 9.a.*

Remarque : *En accord, avec l'enchaînement des questions et à la suite de la question 10, vous pouviez aussi très bien proposer une boucle* `for` *jusqu'à* $\mathrm{N} = 1 + \left\lfloor 1 + \frac{k}{\log 2} \right\rfloor$. *On ne vous aurait rien dit même si c'est mieux une boucle* `while` *je trouve.*