Suites et Polynômes

Problème 1 (Suites) :

Dans tout le problème, les suites sont définies à partir du rang 1, même si ce n'est pas rappelé dans les notations.

On considère la suite u définie par récurrence de la façon suivante :

$u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2 u_n}$.

1 (a) Montrez par récurrence que la suite u est bien définie et à termes dans $]0, +\infty[$.

(le correcteur portera une attention particulière à la qualité du prédicat de récurrence)

(b) Déduisez-en la monotonie de u. Que peut-on en déduire à propos de l'existence éventuelle d'une limite ?

2 (a) Donnez la valeur de la plus petite constante $\mathrm{C} > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{n(n+1)}$.

(b) Montrez qu'il existe une constante $\mathrm{D} > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \mathrm{D}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

3 (a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_1 \leqslant \mathrm{D}\dfrac{n}{n+1}$.

(b) Montrez que la suite u converge vers un réel strictement positif.

4 On note ℓ la limite de la suite u. Il est difficile d'obtenir la valeur exacte de ℓ, c'est pourquoi on cherche juste à encadrer ℓ.

(a) Montrez que $\ell \leqslant u_1 + \dfrac{2}{u_1}$.

(b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{\ell \times n(n+1)}$.

(c) Montrez que $\ell \geqslant \dfrac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 4}}{2}$.

Problème 2 (Polynômes) :

Le but de ce problème est de déterminer les couples $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ tels que

$$\mathrm{P}^2 + (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{Q}^2 = 1. \tag{E}$$

1 Déterminez les solutions de (E) telles que P soit constant.

Désormais, dans les questions 2, 3 et 4, on suppose que (P, Q) est une solution de (E) telle que P ne soit pas constant, on note $n = \deg \mathrm{P} \geqslant 1$. On suppose de plus que les coefficients dominants de P et Q, respectivement a et b, sont strictement positifs.

2 Quel est le degré de Q ? Montrez que $a = b$.

3 (a) Montrez que Q divise PP'.

On admet dans la suite que Q divise également P'.

b) Montrez que $P' = nQ$.

c) Montrez que $(1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$.

4 On pose $f : t \longmapsto P(\cos t)$.

a) Calculez f'', puis montrez que f est de la forme $t \mapsto \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt)$ où λ, μ sont deux constantes.

b) Montrez que $\mu = 0$ et $\lambda \in \{-1, +1\}$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(nt) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}(t)\sin^{2k}(t)$.

b) Déduisez-en l'existence d'un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

c) Justifiez l'unicité d'un tel polynôme.

6 a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple $\left(T_n, \dfrac{1}{n}T'_n\right)$ est solution de (E).

b) Donnez toutes les solutions de (E).