Suites et Polynômes

Problème I (Suites) :

1 (a) On pose $(\mathscr{P})(n)$ le prédicat « u_n existe et $u_n > 0$ ».

$(\mathscr{P})(1)$ est vraie par hypothèse.

Si $(\mathscr{P})(n)$ est vraie, alors u_n existe et $u_n > 0$, donc $n^2 u_n > 0$ donc l'inverse de $n^2 u_n$ existe et est strictement positif, donc finalement, u_{n+1} existe et est la somme de deux nombres strictement positifs donc est lui-même strictement positif : $(\mathscr{P})(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la suite u est donc bien définie et à termes strictement positifs.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} > 0$ donc la suite u est croissante.

Par conséquent, d'après le th. de la limite monotone, u converge ou diverge vers $+\infty$.

2 (a) On cherche une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{n(n+1)}$, ce qui revient à $\dfrac{n+1}{n} \leqslant \mathrm{C}$.

Or la suite $\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante, donc sa valeur maximale est atteinte en 1 : la condition recherchée est donc équivalente à $2 \leqslant \mathrm{C}$.

$\mathrm{C} = 2$ est donc la plus petite valeur convenable.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \leqslant \dfrac{1}{n^2 u_1}$ car la suite u est croissante, puis grâce la question précédente, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{2}{n(n+1)u_1}$.

La constante $\mathrm{D} = \dfrac{2}{u_1}$ convient.

3 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $u_{k+1} - u_k \leqslant \dfrac{2}{k(k+1)u_1}$ donc en additionnant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \leqslant \mathrm{D}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Or, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \leqslant \mathrm{D}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Les deux sommes sont télescopiques et se calculent donc facilement, on obtient $u_n - u_1 \leqslant \mathrm{D}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) =$

Or $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{n}{n+1} \iff (n-1)(n+1) \leqslant n^2 \iff -1 \leqslant 0$: cette dernière inégalité est vraie donc par équivalences, la première l'est aussi.

Comme $\mathrm{D} > 0$, on a alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - u_1 \leqslant \mathrm{D}\frac{n-1}{n} \leqslant \mathrm{D}\frac{n}{n+1}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit donc que $u_n \leqslant u_1 + \mathrm{D}$ car $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$.

La suite u est donc croissante et majorée par $u_1 + \mathrm{D}$ donc elle converge.

Comme son premier terme est strictement positif, sa limite est donc elle-même strictement positive.

4 (a) La question précédente montre que la suite est majorée par $u_1 + \mathrm{D} = u_1 + \dfrac{2}{u_1}$.

Donc, par passage à la limite, on en déduit que $\ell \leqslant u_1 + \dfrac{2}{u_1}$.

(b) La suite u est croissante donc elle est majorée par ℓ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant \ell$ donc $\dfrac{1}{u_n} \geqslant \dfrac{1}{\ell}$ puis

$$u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{1}{\ell \times n^2} \geqslant \frac{1}{\ell \times n(n+1)}.$$

(c) Une rapide décomposition en éléments simples permet d'obtenir l'inégalité

$$u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{1}{\ell}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

On additionne ces inégalités du rang 1 au rang $n-1$, pour avoir, comme dans la question 3a,

$$u_n - u_1 \geqslant \frac{1}{\ell}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Puis par passage à la limite, $\ell - u_1 \geqslant \dfrac{1}{\ell}$.

Donc $\ell^2 - u_1\ell - 1 \geqslant 0$.

Le trinôme $x^2 - u_1x - 1$ a deux racines réelles qui sont $\dfrac{u_1 - \sqrt{u_1^2+4}}{2} < \dfrac{u_1 + \sqrt{u_1^2+4}}{2}$, donc ℓ est à l'extérieur des racines.

Comme la première est négative et $\ell > 0$, on a donc $\ell \geqslant \dfrac{u_1 + \sqrt{u_1^2+4}}{2}$.

Problème 2 (Polynômes) :

$$\mathrm{P}^2 + (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{Q}^2 = 1. \tag{E}$$

1 Si P est constant, alors $(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{Q}^2$ est constant, donc $\deg((1-\mathrm{X}^2)\mathrm{Q}^2) = 2 + 2\deg(\mathrm{Q}) \leqslant 0$ donc $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant -2$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{Q} = 0$, donc $\mathrm{P} = 1$ ou $\mathrm{P} = -1$.

Et réciproquement, les couples $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ sont bien solutions.

Donc les seules solutions telles que P soit constant sont les couples $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

2 $\deg(\mathrm{P}) = n \geqslant 1$ donc $\deg(\mathrm{P}^2) = 2n > \deg(1) = 0$ donc $\deg(1 - \mathrm{P}^2) = \max(\deg(\mathrm{P}^2), \deg(1)) = 2n$.

On en déduit que $\deg(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{Q}^2 = 2 + 2\deg(\mathrm{Q}) = 2n$ donc $\deg(\mathrm{Q}) = n - 1$.

De plus, le terme dominant de P^2 est $a^2\mathrm{X}^{2n}$ et celui de $(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{Q}^2$ est $-\mathrm{X}^2 \times b^2\mathrm{X}^{2n-2}$

Comme la somme est de degré strictement inférieur à $2n$, on a $a^2 - b^2 = 0$ donc comme a, b sont strictement positifs, $a = b$.

3 (a) On dérive : $2\mathrm{PP}' - 2\mathrm{XQ}^2 + 2(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{QQ}' = 0$ donc $\mathrm{PP}' = \mathrm{Q} \times (\mathrm{XQ} - (1-\mathrm{X}^2)\mathrm{Q}')$.

On en déduit que Q divise PP'.

(b) Q divise P' et ces deux polynômes ont le même degré $n-1$ donc il existe une constante λ telle que $\mathrm{P}' = \lambda\mathrm{Q}$.

Le terme dominant de P' est $na\mathrm{X}^{n-1}$ et celui de Q est $b\mathrm{X}^{n-1}$ donc comme $a = b \neq 0$, on en déduit que $\lambda = n$.

Donc $\mathrm{P}' = n\mathrm{Q}$.

(c) $P' = nQ$ donc $P'' = nQ'$.

Or, $2PP' - 2XQ^2 + 2(1-X^2)QQ' = 0$, donc $nPQ - XQ^2 + (1-X^2)QQ' = 0$.

Comme $Q \neq 0$ et que l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est intègre, on a alors $nP - XQ + (1-X^2)Q' = 0$, donc en multipliant par n, $n^2P - XnQ + (1-X^2)nQ' = 0$, c'est-à-dire

$$n^2P - XP' + (1-X^2)P'' = 0.$$

4 (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\sin(t)\,P'(\cos t)$ puis

$$f''(t) = -\cos(t)\,P'(\cos t) + \sin^2(t)\,P''(\cos t) = -\cos(t)\,P'(\cos t) + (1-\cos^2(t))P''(\cos t).$$

On évalue l'égalité polynômiale précédente en $\cos t$:

$$(1-\cos^2(t))P''(\cos t) - \cos(t)\,P'(\cos t) + n^2P(\cos t) = 0.$$

On reconnaît $f''(t) + n^2 f(t) = 0$.

f est donc solution de l'équation différentielle $y'' + n^2y = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 + n^2 = 0$ donc de solutions complexes conjuguées in et $-in$.

f est alors de la forme $t \mapsto \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt)$ où λ, μ sont deux constantes.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt) = P(\cos t)$.

On évalue en 0 cette égalité : $\lambda = P(1)$ or en évaluant en 1 la relation (E), on a $P(1)^2 = 1$ donc $\lambda^2 = 1$ donc $\lambda \in \{-1, +1\}$.

De plus, la fonction f est paire car cos est paire, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$ ce qui donne $\mu\sin(nt) = -\mu\sin(nt)$, donc comme $n \neq 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(t) \neq 0$ et, finalement, $\mu = 0$.

5 (a) Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(nt) &= \operatorname{Re}\left(e^{int}\right) = \operatorname{Re}\left((e^{it})^n\right)\\ &= \operatorname{Re}\left((\cos t + i\sin t)^n\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\cos^{n-\ell}(t)(i\sin(nt))^{\ell}\right).\end{aligned}$$

Dans cette somme, quand ℓ est impair, le terme $\cos^{n-\ell}(t)(i\sin(nt))^{\ell}$ est un imaginaire pur, alors qu'il est réel quand ℓ est pair.

Il vient donc

$$\cos(nt) = \sum_{\ell=0,\,\ell\text{pair}}^{n}\binom{n}{\ell}\cos^{n-\ell}(t)(i\sin(nt))^{\ell}.$$

En posant $\ell = 2k$, on a $\cos(nt) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}^{n}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(t)(i\sin(nt))^{2k}$.

Or, $i^{2k} = (-1)^k$ donc finalement $\cos(nt) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}(t)\sin^{2k}(t)$.

(b) En remplaçant $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$, on obtient

$$\cos(nt) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}(t)(1-\cos^2(t))^k.$$

On pose $T_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^kX^{n-2k}(1-X^2)^k$: T_n est bien un polynôme tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

(c) Si U_n est un autre polynôme tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U_n(\cos t) = \cos(nt)$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = U_n(\cos t)$, donc le polynôme $T_n - U_n$ s'annule en tous les réels $\cos(t)$, ce polynôme a donc une infinité de racines, il est nul.

Autrement dit $T_n = U_n$. Ceci prouve l'unicité de T_n.

6 (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ donc en dérivant $-\sin(t)\,T_n'(\cos t) = -n\sin(nt)$.

Donc pour tout $t \in]0, \pi[$,

$$T_n(\cos t)^2 + (1 - \cos^2 t)\left(\frac{T_n'(\cos t)}{n}\right)^2 = \cos^2(nt) + \sin^2(t) \times \frac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2} = 1.$$

Le polynôme $T_n^2 + (1 - X^2)\left(\frac{T_n'}{n}\right)^2 - 1$ a donc une infinité de racines : tous les réels de la forme $\cos(t)$ quand t décrit $]0, \pi[$, donc il est nul :

$$T_n^2 + (1 - X^2)\left(\frac{T_n'}{n}\right)^2 = 1.$$

(b) La question 6 montre que le couple $\left(T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$ est solution de (E) donc les couples $\left(-T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$, $\left(T_n, -\frac{1}{n}T_n'\right)$ et $\left(-T_n, -\frac{1}{n}T_n'\right)$ sont aussi solutions.

Les questions 2, 3 et 4 montrent que si (P, Q) est solution non constante telle que les coefficients dominants soient strictement positifs, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\cos t) = T_n(\cos t)$ ou pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\cos t) = -T_n(\cos t)$.

Donc, toujours par le même raisonnement, $P = T_n$ ou $P = -T_n$.

Et dans ce cas, (E) donne $Q^2 = \left(\frac{T_n'}{n}\right)^2$ donc $Q = \frac{T_n'}{n}$ ou $-\frac{T_n'}{n}$

Commentaires : $\mathbb{R}[X]$ *est intègre !* $A^2 = B^2 \iff (A-B)(A+B) = 0 \iff A-B = 0$ *ou* $A+B = 0$.

Si on supprime la condition sur les coefficients dominants, alors (P, Q) ou $(-P, Q)$ ou $(P, -Q)$ ou $(-P, -Q)$ la vérifient et on est ramené aux quatre cas précédents.

Conclusion : les solutions du problème sont les six couples $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$, $\left(-T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$, $\left(T_n, -\frac{1}{n}T_n'\right)$ et $\left(-T_n, -\frac{1}{n}T_n'\right)$.