Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes

1 Compléter :

Définition 4 (Produit de polynômes) : Soient $\mathrm{P} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathrm{Q} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle *produit* des polynômes P et Q, le polynôme défini par :

$$\mathrm{P} \times \mathrm{Q} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition 7 : Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

On appelle *degré de* P ....

On convient que $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = \ldots\ldots$.

Définition 10 : Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle *polynôme dérivé de* P le polynôme défini par ....

On définit également, par récurrence, le *polynôme dérivé k-ième de* P, ..., par

$$\begin{cases} \mathrm{P}^{(0)} = \ldots \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}^{(k+1)} = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Proposition 6 : $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\mathrm{P}') = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

En particulier, $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(\mathrm{P}) \leqslant n \implies \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition 8 :

a) $\forall\, \mathrm{P},\ \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})^{(n)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

b) $\forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{PQ})^{(n)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Théorème 10 (Théorème de Taylor) : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On suppose que $\deg(P) = p$.

Alors :

$P =$

....

Définition 13 : Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* ou *premier* si :

- ....
- ....

Théorème 18 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

α est une racine de P $\iff$ ....

Corollaire 18.1 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si P admet n .... $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, alors ....

Théorème 21 : Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(a) α est une racine de P de multiplicité m.
(b) ....
(c) ....

Corollaire 24.2 : Les seuls polynômes normalisés irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

- ....
- ....
  ....

2 Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 1$ par $X^2 + 2X - 3$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$P = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

est au moins 2.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4 Trouver un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que

$$P(3) = 7, \qquad P(-2) = 7 \quad \text{et} \quad P(1) = 1.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5 Factoriser $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....