Polynômes

1 Compléter :

Définition 4 (Produit de polynômes) : Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle *produit* des polynômes P et Q, le polynôme défini par :

$$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Définition 7 : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

On appelle *degré de* P le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

On convient que $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$.

Définition 10 : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle *polynôme dérivé de* P le polynôme défini par $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

On définit également, par récurrence, le *polynôme dérivé* k*-ième de* P, noté $P^{(k)}$, par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'. \end{cases}$$

Proposition 6 : $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leqslant 0 \end{cases}$

En particulier, $\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \deg(P) \leqslant n \implies P^{(n+1)} = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Proposition 8 :

(a) $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$.

(b) $\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Théorème 10 (Théorème de Taylor) : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$. On suppose que $\deg(\mathrm{P}) = p$.

Alors :

$$\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{p} \frac{\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}(a)}{n!}(\mathrm{X}-a)^n = \widetilde{\mathrm{P}}(a) + \widetilde{\mathrm{P}}'(a)(\mathrm{X}-a) + \frac{\widetilde{\mathrm{P}}''(a)}{2!}(\mathrm{X}-a)^2 + \cdots + \frac{\widetilde{\mathrm{P}}^{(p)}(a)}{p!}(\mathrm{X}-a)^p.$$

Définition 13 : Un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est dit *irréductible* ou *premier* si :

- $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 1$.
- P n'admet comme diviseurs que les λ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$) et les $\mu\mathrm{P}$ (avec $\mu \in \mathbb{K}^\star$).

Théorème 18 : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\alpha \text{ est une racine de } \mathrm{P} \iff \mathrm{P} \text{ est divisible par } \mathrm{X}-\alpha.$$

Corollaire 18.1 : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, alors P est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-\alpha_k)$.

Théorème 21 : Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a. α est une racine de P de multiplicité m.
b. $\exists \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} = (\mathrm{X}-\alpha)^m\mathrm{Q}$ et $\mathrm{Q}(\alpha) \neq 0$.
c. $\mathrm{P}(\alpha) = \mathrm{P}'(\alpha) = \cdots = \mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Corollaire 24.2 : Les seuls polynômes normalisés irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont :

- Les polynômes de degré 1 de la forme $\mathrm{X}-\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Les polynômes de degré 2 irréductibles de la forme $\mathrm{X}^2 + u\mathrm{X} + v$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $u^2 - 4v < 0$.

2 Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 1$ par $X^2 + 2X - 3$.

En remarquant que $X^4 - 1 = (X-1)(X^3+X^2+X+1)$ *et* $X^2+2X-3 = (X-1)(X+3)$ *il suffit d'effecteur la division euclidienne de* X^3+X^2+X+1 *par* $X+3$ *et de trouver :*

$$X^3+X^2+X+1 = (X+3)(X^2-2X+7) - 20 \implies X^4-1 = (X^2+2X-3)(X^2-2X+7) - 20(X-1),$$

en vérifiant bien que $\deg(-20X+20) < \deg(X^2+2X-3)$.

3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$P = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

est au moins 2.

Notons m *l'ordre de multiplicité de* 2.

Avant tout calcul, il est bon de remarquer que $P = X^{n-1}\left(nX^3 - (4n+1)X^2 + 4(n+1)X - 4\right) = X^{n-1}Q$.

Comme 2 *n'est pas racine de* X^{n-1}, *il ne peut l'être que de* Q.

(a) $Q(2) = 8n - 4(4n+1) + 8(n+1) - 4 = 0$.

Donc $m \geqslant 1$.

(b) $Q'(2) = 12n - 4(n+1) + 8(n+1) = 0$.

Donc $m \geqslant 2$.

(c) $Q''(2) = 12n - 2(4n+1) = 2(2n-1) \neq 0$ *dans* $\mathbb{Z}$.

Donc $m < 3$.

L'ordre de multiplicité est 2.

4 Trouver un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que

$$P(3) = 7, \qquad P(-2) = 7 \quad \text{et} \quad P(1) = 1.$$

Avec les polynômes de Lagrange, on a :

$$\begin{aligned} P &= \frac{(X+2)(X-1)}{(3+2)(3-1)} \times 7 + \frac{(X-3)(X-1)}{(-2-3)(-2-1)} \times 7 + \frac{(X-3)(X+2)}{(1-3)(1+2)} \times 1 \\ &= \frac{7}{10}(X+2)(X-1) + \frac{7}{15}(X-3)(X-1) - \frac{1}{6}(X-3)(X+2) \\ &= X^2 - X + 1. \end{aligned}$$

5 Factoriser $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

$$P = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X + e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right).$$