

Nom :

Prénom :

Analyse asymptotique

I QCM

Une seule réponse exacte par question.

- 1** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 en 1 est
- a $f(1) + xf'(1) + \frac{x^2}{2}f''(1)$

 c $f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1)$
- b $(x-1) \left(f(1) + xf'(1) + \frac{x^2}{2}f''(1) \right)$

 d $f(x) + (x-1)f'(x) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(x)$
- 2** Si $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ alors $f^2(x)$ admet comme développement limité :
- a $1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$

 c $1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$
- b $1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)$

 d $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$
- 3** Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^3 telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)$ alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est
- a $1/2$

 b 3

 c 9

 d 18
- 4** En 0, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1+x} - 1$ est équivalente à
- a $\sqrt[3]{x}$

 b x

 c $3x$

 d $\frac{x}{3}$
- 5** La limite en 0 de $\frac{\tan x - x}{\sin x - x}$ vaut
- a 0

 b 1

 c $+\infty$

 d -2
- 6** Au voisinage de 0, la fonction $\operatorname{ch}(x) - \cos(x)$ est
- a positive
 b négative
 c positive pour $x \geq 0$ et négative pour $x \leq 0$
 d de signe indéterminé
- 7** Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f est, au voisinage de 0, au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$?
- a $f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

 c $f(x) = 1 - x + o(x)$
- b $f(x) = 1 - x + x^3 + o(x^3)$

 d $f(x) = 1 - x - x^4 + o(x^4)$

8 Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f admet en 0 un point d'inflexion ?

a $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$

c $f(x) = x + o(x)$

b $f(x) = x - x^3 + o(x^3)$

d $f(x) = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$

9 Considérons la fonction polynomiale $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Au voisinage de zéro, on a $P(x) = o(x^2)$ si et seulement si

a $a = b = 0$

c $a = b = c = d = 0$

b $a = b = c = 0$

d $c = d = 0$

10 Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?

a $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$

c $u_n = o(n)$

b $u_{n+1} \sim u_n$

d $u_n \sim 1$

II COURS

1 Donner un équivalent en 0 de $\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$.

.....

2 Donner un équivalent en 0 de $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$.

.....

3 Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 - x + x^2) + x$.

.....

4 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Donner le coefficient de x^n dans le développement limité de $(1+x)^\alpha$ en 0.

.....
.....
.....

5 Déterminer de la manière que voulez mais pas celle de votre voisin un $DL_3(0)$ de $\tan(x)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

III APPLICATIONS

1 Donner un $DL_5(0)$ de $\ln(\cos(x))$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2 Donner un DL₂(0) de $\sqrt{1 + \arctan(x)}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x) - x)}{\sqrt{1 + x^3} - 1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 Montrer que $\frac{e^x - 1}{1 - \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2}{x} + 1 + o(1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....