Analyse asymptotique

I QCM

Une seule réponse exacte par question.

1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 en 1 est

- a ☐ $f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2} f''(1)$
- b ☐ $(x-1)\left(f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2} f''(1)\right)$
- c ☑ $f(1) + (x-1)f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2} f''(1)$
- d ☐ $f(x) + (x-1)f'(x) + \dfrac{(x-1)^2}{2} f''(x)$

2 Si $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ alors $f^2(x)$ admet comme développement limité :

- a ☐ $1 + 2x + 2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- b ☐ $1 + 2x + 4x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- c ☑ $1 + 2x + 3x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- d ☐ $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

3 Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est

- a ☐ $1/2$
- b ☐ 3
- c ☐ 9
- d ☑ 18

4 En 0, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1+x} - 1$ est équivalente à

- a ☐ $\sqrt[3]{x}$
- b ☐ x
- c ☐ $3x$
- d ☑ $\dfrac{x}{3}$

5 La limite en 0 de $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$ vaut

- a ☐ 0
- b ☐ 1
- c ☐ $+\infty$
- d ☑ -2

6 Au voisinage de 0, la fonction $\mathrm{ch}\,(x) - \cos(x)$ est

- a ☑ positive
- b ☐ négative
- c ☐ positive pour $x \geqslant 0$ et négative pour $x \leqslant 0$
- d ☐ de signe indéterminé

7 Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f est, au voisinage de 0, au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$?

- a ☑ $f(x) = 1 - x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- b ☐ $f(x) = 1 - x + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$
- c ☐ $f(x) = 1 - x + \mathrm{o}\left(x\right)$
- d ☐ $f(x) = 1 - x - x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

8 Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f admet en 0 un point d'inflexion ?

- (a) ☐ $f(x) = x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- (b) ☑ $f(x) = x - x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$
- (c) ☐ $f(x) = x + \mathrm{o}\left(x\right)$
- (d) ☐ $f(x) = x - x^2 + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$

9 Considérons la fonction polynomiale $\mathrm{P}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Au voisinage de zéro, on a $\mathrm{P}(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ si et seulement si

- (a) ☐ $a = b = 0$
- (b) ☑ $a = b = c = 0$
- (c) ☐ $a = b = c = d = 0$
- (d) ☐ $c = d = 0$

10 Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

- (a) ☐ $u_{n+1} - u_n \to 0$
- (b) ☐ $u_{n+1} \sim u_n$
- (c) ☐ $u_n = \mathrm{o}\left(n\right)$
- (d) ☑ $u_n \sim 1$

II Cours

1 Donner un équivalent en 0 de $\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$.

$$\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6!}x^6.$$

2 Donner un équivalent en 0 de $\tan(x) - x - \dfrac{x^3}{3}$.

$$\tan(x) - x - \frac{x^3}{3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{15}x^5.$$

3 Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 - x + x^2) + x$.

$$\ln(1 - x + x^2) + x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2.$$

4 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Donner le coefficient de x^n dans le développement limité de $(1+x)^\alpha$ en 0.

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

5 Déterminer de la manière que voulez mais pas celle de votre voisin un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\tan(x)$.

Au choix, l'équation différentielle, la formule de Taylor-Young, la primitivation de $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$, le quotient de $\sin(x)$ par $\cos(x)$ ou par identification

III Applications

1. Donner un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\ln(\cos(x))$.

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

2. Donner un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+\arctan(x)}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\arctan(x)} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{1+x+\mathrm{o}\left(x^2\right)}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)-\frac{1}{8}\left(x+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^2\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x)-x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$.

$$\frac{\sin(\sin(x)-x)}{\sqrt{1+x^3}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin\left(-\frac{x^3}{6}\right)}{\frac{1}{2}x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{\frac{1}{2}x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{3} \text{ donc } \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x)-x)}{\sqrt{1+x^3}-1}=-\frac{1}{3}.$$

4. Montrer que $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^x-1}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x}+1+\mathrm{o}(1)$.

Tout le savoir-faire repose sur l'ordre auquel mené les développements limités.

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}\times\left(x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)$$

On factorise les facteurs par $\frac{x^2}{2}$ et x respectivement,

$$\begin{aligned}&\underset{x\to 0}{=} \frac{2x}{x^2}\times\frac{1}{1+\mathrm{o}(x)}\times\left(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x}\times(1+\mathrm{o}(x))\left(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x}\times\left(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right)=\frac{2}{x}+1+\mathrm{o}(1).\end{aligned}$$