Analyse asymptotique

Commentaires : *Pour toutes vos recherches de DL ou DA, je vous conseille vivement de vérifier vos calculs avec des applis telles que dcode.*

I Développements limités

Exercice 1 (DL de $\arctan(x)$ au voisinage de 0) : Donner le développement limité de $\arctan(x)$ au voisinage de 0.

Correction : On sait déjà que :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right).$$

Par primitivation, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right).\end{aligned}$$

Remarque : Les coefficients de rang pair sont tous nuls puisque la fonction $\arctan$ est impaire.

Exercice 2 : Donner un développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre 4 :

1. $x \longmapsto \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\ln(1-x)$
2. $x \longmapsto \frac{1}{2-x}$
3. $x \longmapsto (1+x)^x$
4. $x \longmapsto \cos^2(x)$
5. $x \longmapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$
6. $x \longmapsto \cos(\sin(x))$

Correction :

1. $\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$
2. $\frac{1}{2-x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$
3. $(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$
4. $\cos^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$
5. $\mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$
6. $\cos(\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

Exercice 3 : Donner un développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes au voisinage du point et à l'ordre indiqués :

1. $x \longmapsto \cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.
2. $x \longmapsto \ln(x)$ en e à l'ordre 4.
3. $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ en 2 à l'ordre 4.

Correction :

1. On ramène le problème en 0 en posant $x = \dfrac{\pi}{4} + h$:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos(h)-\sin(h)\big) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1-\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)-\left(h-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\cos(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2\sqrt{2}} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{6\sqrt{2}} + \mathrm{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

2. $\ln(x) \underset{x\to \mathrm{e}}{=} \ln(\mathrm{e}) + \dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \dfrac{(x-\mathrm{e})^2}{2\,\mathrm{e}^2} + \dfrac{(x-\mathrm{e})^3}{3\,\mathrm{e}^3} - \dfrac{(x-\mathrm{e})^4}{4\,\mathrm{e}^4} + \mathrm{o}\left((x-\mathrm{e})^4\right)$
3. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 2}{=} \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2(x-2) + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2(x-2)^2 + \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^2(x-2)^3 + \dfrac{1}{24}\mathrm{e}^2(x-2)^4 + \mathrm{o}\left((x-2)^4\right)$

Exercice 4 : Donner un développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes aux ordres indiqués :

1. $x \mapsto \left(\mathrm{e}^x\right)^2$ à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \ln^2(1+x)$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$ à l'ordre 3.
4. $x \mapsto \big(\sin(x)-x\big)\big(\cos(x)-1\big)$ à l'ordre 8.
5. $x \mapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9.
6. $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ à l'ordre 5.
7. $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ à l'ordre 3.
8. $x \mapsto \ln\left(\cos^2(x)\right)$ à l'ordre 4.
9. $x \mapsto \tan\left(\mathrm{sh}\,(x)-x\right)$ à l'ordre 8.
10. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) - \dfrac{x^2}{1+x^2}$ à l'ordre 9.
11. $x \mapsto \sqrt{1+\arctan(x)}$ à l'ordre 3.
12. $x \mapsto \ln\big(\cos(x)\big)$ à l'ordre 6.
13. $x \mapsto \dfrac{x^3}{\mathrm{sh}\,(x)-x}$ à l'ordre 2.
14. $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}}$ à l'ordre 3.
15. $x \mapsto \arctan^2(x)\cos(x)$ à l'ordre 5.

Correction :

1. $\left(\mathrm{e}^x\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right).$
2. $\ln^2(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - x^3 + \dfrac{11}{12}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$
3. $\dfrac{\cos(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$
4. $\big(\sin(x)-x\big)\big(\cos(x)-1\big) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{12}x^5 - \dfrac{1}{90}x^7 + \mathrm{o}\left(x^8\right).$
5. $\sin^6(x) \underset{x\to 0}{=} x^6 - x^8 + \mathrm{o}\left(x^9\right).$

6

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} e^{x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{120}x^5+o\left(x^6\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+\cancel{\frac{1}{120}x^5}+o\left(x^6\right)\right)^2\\
&\qquad+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\cancel{\frac{1}{120}x^5}+o\left(x^6\right)\right)^3+\frac{1}{24}\left(x-\cancel{\frac{x^3}{6}}+\cancel{\frac{1}{120}x^5}+o\left(x^6\right)\right)^4\\
&\qquad+\frac{1}{120}\left(x-\cancel{\frac{x^3}{6}}+\cancel{\frac{1}{120}x^5}+o\left(x^6\right)\right)^5\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{10}x^5+o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

7 $\arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o\left(x^3\right)$.

8 $\ln\left(\cos^2(x)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o\left(x^4\right)$.

9 $\tan\left(\operatorname{sh}(x)-x\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+o\left(x^8\right)$.

10 $\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\frac{x^2}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{8}x^8+o\left(x^9\right)$.

11 Comme $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+o\left(u^3\right)$ et $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\arctan(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)^2\\
&\qquad+\frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)^3+o\left(\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^3+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(x^2\right)^2+\frac{1}{16}\left(x^3\right)^3+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{5x^3}{48}+o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

12 Comme $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u+\ldots+o\left(u^{\cdots}\right)$ et $\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\ldots+o\left(x^{\cdots}\right)$, il est nécessaire de pousser le DL de $\cos(x)-1$ à l'ordre 6 et celui de $\ln(1+u)$ à l'ordre 3.

On obtient : $\ln\left(\cos(x)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o\left(x^6\right)$.

13

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{\operatorname{sh}(x)-x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{6}{1+\frac{x^2}{20}+o\left(x^2\right)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 6\left(1-\frac{x^2}{20}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 6-\frac{3x^2}{10}+o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

14 Avant d'attaquer bille en tête, il est bon de faire l'inventaire des développement limités nécessaires, de quelles fonctions et surtout réfléchir à quel ordre les pousser pour éviter trop de calculs.

On a :

- $\sqrt[3]{1+u}=(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+\frac{5u^3}{81}+o\left(u^3\right)$.

- $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)}{x} = 1 + \underbrace{\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)}_{= u \xrightarrow[x\to 0]{}}$. On perd un ordre à cause du x au dénominateur.

D'où :

$$\sqrt[3]{\frac{e^x-1}{x}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)^2 + \frac{5}{81}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)^3\right)$$

Avant de développer, on supprime tous les termes qui seront absorbés par le $o(x^3)$:

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \cancel{\frac{x^3}{24}} + \cancel{o(x^3)}\right)^2 + \frac{5}{81}\left(\frac{x}{2} + \cancel{\frac{x^2}{6}} + \cancel{\frac{x^3}{24}} + \cancel{o(x^3)}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{\cancel{2}} + \cancel{\frac{x^2}{6}} + \cancel{\frac{x^3}{24}} + \cancel{o(x^3)}\right)^3\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{5}{81}\left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{324} + o(x^3).$$

15 Comme précédemment, on fait l'inventaire et on prend de la hauteur :

On a :

- $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \ldots + o(x^{\cdots})$: la présence du x nous fera gagner 2 ordres lorsque l'on passera au carré.

  On pourra donc se limiter à un DL d'ordre $5 - 2 = 3$ pour $\cos(x)$.
- et $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \ldots + o(x^{\cdots})$: la présence du 1 nous oblige à pousser le DL de $\arctan^2(x)$ à l'ordre 5 donc celui de $\arctan(x)$ à l'ordre $\left\lfloor \dfrac{5}{2} \right\rfloor + 1 = 3$.

  Remarque : La fonction arctan étant impaire, on aura de toute manière directement un DL d'ordre 4. Idem pour $\cos(x)$, paire, avec un DL d'ordre 2.

D'où :

$$\arctan^2(x)\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{7x^4}{6} + o(x^7).$$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\tan x - x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.

Correction :

1 f est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée qui vérifie $f'(x) = 1 + 2\tan^2 x$ est strictement positive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Puisque $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}} f = -\infty$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} f = +\infty$, f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Comme f' ne s'annule pas, f^{-1} est également de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. Puisque f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et est impaire en tant que réciproque d'une fonction impaire, elle admet un développement limité à l'ordre 6 en 0 qu'on peut écrire sous la forme :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right).$$

D'autre part, on sait que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^6\right).$$

Le développement limité de $f^{-1}\circ f$ en 0 s'obtient en composant les développements limités.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\circ f\right)(x) &\underset{x\to 0}{=} a_1\left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) + a_3\left(x + \frac{2x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^3 + a_5\left(x + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^5 + \underbrace{\mathrm{o}\left(f(x)^6\right)}_{=\mathrm{o}(x^6)} \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1x + \left(a_3 + \frac{2a_1}{3}\right)x^3 + \left(a_5 + \frac{4a_1}{15} + 2a_3\right)x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right).\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x) \underset{x\to 0}{=} x = x + \mathrm{o}\left(x^6\right).$$

Par unicité du développement limité en 0, on en déduit le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_3 + 2a_1 = 0 \\ 15a_5 + 4a_1 + 30a_3 = 0 \end{cases} \iff a_1 = 1,\ a_3 = -\frac{2}{3},\ a_5 = \frac{16}{15}.$$

Le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0 est donc donné par :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right).$$

Exercice 6 : Mêmes questions avec

1. $g : x \longmapsto \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ à l'ordre 3.
2. $h : x \longmapsto x\cos(x)$.

Correction :

1. On remarque d'abord que $g(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Ainsi, g est continue en 0 avec $g(0) = 0$ et g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 1$.

Ainsi, g est continue sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, on vérifie (par exemple en la dérivant) que g est strictement croissante.

De plus, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Ainsi, g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque $\psi = g^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Puisque $g'(0) \neq 0$ et que g est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, ψ est indéfiniment dérivable en 0.

Ainsi, ψ admet un DL à tout ordre en 0.

De $g(0) = 0$, on tire $\psi(0) = 0$ et donc le DL à l'ordre 3 de ψ en 0 s'écrit

$$\psi(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^2 + cx^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Pour calculer a, b, c, écrivons quel est le développement limité à l'ordre 3 de $g \circ \psi$:

$$(g \circ \psi)(x) \underset{x \to 0}{=} \left(ax + bx^2 + cx^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(ax + \cancel{bx^2 + cx^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)}\right)^3 + \underbrace{o\left(\psi(x)^3\right)}_{=\mathrm{o}(x^3)} \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

$$ax + bx^2 + \left(c + \frac{1}{2}a^3\right)x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Par unicité du développement limité, on extrait :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b & = 0 \\ \frac{1}{2}a^3 + c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 0 \\ c & = -\frac{1}{2}. \end{cases}.$$

soit $\psi(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Commentaires : C'est en général une mauvaise idée d'utiliser la relation $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ plutôt que $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ car vous courez le risque d'obtenir un système non linéaire en les coefficients comme ici avec a^3 même s'il s'est bien résolu. Je ne l'ai fait que pour vous montrer qu'on pouvait quand même mais je préfère l'autre manière.

$\boxed{2}$ Par produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}$, h l'est également. Elle est aussi impaire.

On a, de plus $h(x) = x\cos(x) \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x\right)$.

En particulier, $h'(0) = 1 > 0$. Il existe donc un voisinage U de 0 sur lequel h' est strictement positive. La fonction h établit donc de U sur $\mathrm{V} = h(\mathrm{U})$ une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^\infty$. Comme $h(0) = 0$, $0 \in \mathrm{V}$ et, quitte à réduire U, on peut le supposer symétrique par rapport à l'origine.

Elle admet donc un DL au moins à l'ordre 6 qui, par imparité s'écrit :

$$h^{-1}(y) \underset{y \to 0}{=} a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + \mathrm{o}\left(y^6\right).$$

Comme $h(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$ et $h^{-1}(h(x)) = x \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^6\right)$, par unicité du DL, on peut écrire :

$$a_1\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) + a_3\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^3 + a_5\left(x + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^5 \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

$$a_1 x + \left(-\frac{1}{2}a_1 + a_3\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}a_1 - \frac{3}{2}a_3 + a_5\right)x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right) \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

ON résout alors le système simple :

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ -a_1 + 2a_3 & = 0 \\ a_1 - 36a_3 + 24a_5 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_3 & = \frac{1}{2} \\ a_5 & = \frac{17}{24}. \end{cases}$$

On trouve $h^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{17}{24}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$.

Exercice 7 : Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ sans être deux fois dérivable en 0.

Correction : Comme $u \longmapsto \sin(u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ alors $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ d'après le théorème d'encadrement et $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.

La fonction f admet donc un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 dont la partie régulière est nulle (mais existe !).

En particulier, on en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour tout $x \neq 0$, f, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, f y est également dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{T}_{f',0}(x) = \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 3x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Or, pour $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $2u_n \sin\left(\dfrac{1}{u_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\cos\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = (-1)^n$.

Le taux d'accroissement $\mathrm{T}_{f',0}(u_n)$ n'a donc pas de limite en $+\infty$ et $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ non plus en 0 : la fonction f' n'est pas dérivable en 0.

En conclusion, la fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0 alors qu'elle y admet un développement limité d'ordre 2.

II Limites et équivalents

Exercice 8 : Donner un équivalent en 0 des expressions suivantes :

1. $\sin(2x) - \sin(x)$
2. $\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x^2}$.
3. $\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x}$.

Correction : Avant de débuter la recherche d'un équivalent se pose toujours la question de savoir si raisonner avec les équivalents suffit ou s'il faut effectuer un développement limité et, dans ce cas, savoir jusqu'où pousser celui-ci. Un peu de hauteur, de travail et de métier devraient vous aider.

1. $\sin(2x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} (2x + \mathrm{o}(x)) - (x + \mathrm{o}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. Ici, inutile de développer $\sqrt{1+x^2}$ trop loin par la présence du x^2 qui fait grimper l'ordre de son développement limité.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x^2} &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{x+\mathrm{o}(x)} - (1+\mathrm{o}(x)) \underset{x\to 0}{=} (1 + x + \mathrm{o}(x)) - (1+\mathrm{o}(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x$.

3. Comme $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)$, on ne peut plus se contenter de développer $\sqrt{1+x}$ avec une précision inférieure à $\mathrm{o}(x)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{x+\mathrm{o}(x)} - \left(1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)\right) \underset{x\to 0}{=} (1 + x + \mathrm{o}(x)) - \left(1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$.

Exercice 9 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}$.

Correction :

$$\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln(n)}{n+1} = \ln(n) + \left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \left(\left(\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

Le $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ absorbe donc $\frac{1}{n^2}$ et le $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$:

$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or, $\frac{1}{n} = \mathrm{o}(\ln(n))$, d'où :

$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)).$$

Donc $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))$.

Exercice 10 : Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin(x)-\ln(1+x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{sh}(\sin(x))-\sin(\mathrm{sh}(x))}{x^5-\sin^5(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \arccos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)-x}{x}$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^2}$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\mathrm{sh}(x)-x\mathrm{ch}(x)}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{2\tan(x)-\tan(2x)}{x\sin^2(x)}$.
14. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.
15. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{\tan^2(x)} - \frac{1}{x^2}$.
16. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^{\arctan(x)}-\mathrm{e}^{\tan(x)}}{\mathrm{e}^{\arcsin(x)}-\mathrm{e}^{\sin(x)}}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin(x)}$.
18. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

Correction :

1. Forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ au premier abord.

   On développe le numérateur :

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x \underset{x\to0}{=} \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}(x^3)\right) - \left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}(x^3)\right) - x$$
$$\underset{x\to0}{=} \frac{x^3}{8} + \mathrm{o}(x^3).$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{8x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5} = +\infty$.

2 Forme indéterminée de la forme $\dfrac{0}{0}$, on cherche séparément un équivalent du numérateur et du dénominateur :

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{6x}{5}+\mathrm{o}\left(x\right)\right)-\left(1-\frac{x}{3}+\mathrm{o}\left(x\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{13}{15}x+\mathrm{o}\left(x\right).\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}3\sin(x)-\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} 3\left(x+\mathrm{o}\left(x\right)\right)-\left(x+\mathrm{o}\left(x\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2x+\mathrm{o}\left(x\right).\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin(x)-\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{13}{30}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin(x)-\ln(1+x)} = \dfrac{13}{30}$.

3 $\dfrac{\mathrm{sh}\left(\sin(x)\right)-\sin(\mathrm{sh}\left(x\right))}{x^5-\sin^5(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{45}x^7}{\frac{5}{6}x^7} = \dfrac{2}{75} \implies \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}\left(\sin(x)\right)-\sin(\mathrm{sh}\left(x\right))}{x^5-\sin^5(x)} = \dfrac{2}{75}$.

4 Forme indéterminée de la forme $+\infty\times 0$ a priori mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc on peut effectuer un développement limité de e^u et $\arccos(u)$ au voisinage de 0 :

On développe le numérateur :

$$\begin{aligned}n\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\arccos\left(\frac{1}{n}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}+1.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\arccos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}+1$.

5 $\dfrac{e^x-1-x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

6 $\left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[12]{\mathrm{e}}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{\mathrm{e}}}$.

7 $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \dfrac{2}{3}$.

8 $\dfrac{\sin(x)-x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{6}x^2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x} = 0$.

9 $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

10 $\dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{2}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = +\infty$.

11 $\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}x$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^2} = 0$.

12 $\dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)} = -1$

13 $\dfrac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x\sin^2(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x\sin^2(x)} = -2.$

14 $\dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \dfrac{3}{2}.$

15 $\dfrac{1}{\tan^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\tan^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{3}.$

16 $\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan(x)} - \mathrm{e}^{\tan(x)}}{\mathrm{e}^{\arcsin(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)}} \underset{x\to 0}{\sim} -2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\arctan(x)} - \mathrm{e}^{\tan(x)}}{\mathrm{e}^{\arcsin(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)}} = -2.$

17 $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{6}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\sin(x)} = -\dfrac{1}{6}.$

18 $\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}.$

Exercice II :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

2 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 - 2x\ln(x)}{x(x-1)\ln(x)}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right) + x - 1$

4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$

5 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$

Correction :

1 Voici un exemple typique de calcul de limite nécessitant les DL.

On commence bien sûr par passer à l'exponentielle et on pose $f(x) = \mathrm{e}^{x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$.

Comme $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ et la fonction f est bien définie au voisinage de $+\infty$, mais ne permet pas de calculer la limite puisqu'il reste dans l'exponentielle une belle forme indéterminée.

Tentons alors de faire un DL de tout ça :

$$\begin{aligned} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{6x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Autrement dit, en composant par l'exponentielle, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

Il va sans dire qu'obtenir une telle valeur par une autre méthode serait bien compliqué.

2 Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 1 - 2x\ln(x)}{x(x-1)\ln(x)}$.

On commence par ramener le problème en 0 en posant $h = x - 1$.

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \frac{h^2 + 2h - 2(1-h)\ln(1+h)}{h(1+h)\ln(1+h)} \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{h^2 + 2h - 2(1-h)\left(h - \frac{1}{2}h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right)}{h(1+h)(h + \mathrm{o}\left(h\right))} \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{4h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)}{h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)} \underset{h\to 0}{=} \frac{4 + \mathrm{o}\left(1\right)}{1 + \mathrm{o}\left(1\right)} \\ &\underset{h\to 0}{=} (4 + \mathrm{o}\left(1\right))(1 + \mathrm{o}\left(1\right)) \\ &\underset{h\to 0}{=} 4 + \mathrm{o}\left(1\right). \end{aligned}$$

Conclusion, $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$.

3 On commence par ramener le problème en 0 en posant $h = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &= -\frac{1}{h^2}\ln(1+h) + \frac{1}{h} - 1 \\ &\underset{h\to 0}{=} -\frac{1}{h^2}\left(h - \frac{1}{2}h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) + \frac{1}{h} - 1 \\ &\underset{h\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right). \end{aligned}$$

Conclusion, $\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + x - 1 = \frac{1}{2}$.

4 $\frac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)} = \frac{1}{2}$.

5 $\frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{1}{8}$ donc $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2} = -\frac{1}{8}$.

Exercice 12 : Pour tous $a, b > 0$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = \sqrt{ab}$.

Correction : Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a : $c^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln c}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln c}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } \frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} &\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln a}{2x} + \frac{\ln b}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln\sqrt{ab}}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{ab}}{x} = 0$ et $\ln(1+u) \underset{x\to 0}{=} u + \mathrm{o}\left(u\right)$, on a :

$$\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\ln\sqrt{ab}}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \ln\sqrt{ab} + \mathrm{o}\left(1\right).$$

Enfin, par composition à gauche par l'exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{ab}\right)} = \sqrt{ab}.$$

III ÉTUDES LOCALE ET ASYMPTOTIQUE

Exercice 13 : Montrer que :

1. $\dfrac{\sin(x)-x}{\ln(1+x)-x} \underset{x\to0}{=} \dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{9}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $\dfrac{\ln(1+x)-x}{\sin(x)-x} \underset{x\to0}{=} \dfrac{3}{x}-2+\dfrac{33}{20}x+\mathrm{o}\left(x\right)$.
2. Que peut-on en déduire pour l'étude locale en 0 des fonctions associées ?

Correction :

1.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)-x}{\ln(1+x)-x} &\underset{x\to0}{=} \frac{-\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}{-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)} \underset{x\to0}{=} \frac{x}{3}\left(\frac{1+\mathrm{o}\left(1\right)}{1-\dfrac{2}{3}x+\mathrm{o}\left(x\right)}\right)\\ &\underset{x\to0}{=} \frac{x}{3}\left(1+\frac{2}{3}x+\mathrm{o}\left(x\right)\right)\\ &\underset{x\to0}{=} \frac{x}{3}+\frac{2}{9}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Exercice 14 : À partir d'un développement limité, déduire le prolongement par continuité, la dérivabilité, la position relative locale courbe/tangente de

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) \text{ en } 0.$$

Correction : $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) \underset{x\to0}{=} \dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{24}-\dfrac{x^3}{2880}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et le prolongement par continuité de f en posant cette valeur sera dérivable en 0 avec $f'(0) = \dfrac{1}{24}$.

L'équation de la tangente en 0 est aussi donnée par $y = \dfrac{1}{24}x+\dfrac{1}{2}$, la position par le signe de $-x^3$ au voisinage de 0 soit dessus puis dessous. C'est un point d'inflexion.

Exercice 15 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0 et étudier leur position relative.

1. $f : x \longmapsto \exp(x)-\dfrac{1}{1+x}$.
2. $g : x \longmapsto x\cos(2x)$.
3. $h : x \longmapsto \cos(x)\sin(2x)$.
4. $k : x \longmapsto \ln\left(1+x+x^2\right)$ en 0 et 1.

Correction :

1. $f(x) \underset{x\to0}{=} 2x-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$.
2. $g(x) \underset{x\to0}{=} x-2x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)$.
3. $h(x) \underset{x\to0}{=} 2x-\dfrac{7x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$.
4. $k(x) \underset{x\to0}{=} x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$ et $k(x) \underset{x\to1}{=} \ln(3)+(x-1)-\dfrac{1}{6}(x-1)^2+\mathrm{o}\left((x-1)^2\right)$.

   En 1, l'équation de la tangente est donc $y = x-1+\ln(3)$ et la courbe de k est toujours au-dessous.

Exercice 16 : Étude locale en $a=1$ de f définie par $f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

Correction : On pose $h=x-1$, d'où $f(x)=f(1+h)=\dfrac{(1+h)\ln(1+h)}{2h\left(1+\frac{1}{2}h\right)}$.

On effectue alors un développement limité à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
f(1+h) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1+h}{2h}\left(h-\frac{1}{2}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right)\left(1-\frac{1}{2}h+\mathrm{o}\left(h\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1+h)\left(1-\frac{1}{2}h+\mathrm{o}\left(h\right)\right)\left(1-\frac{1}{2}h+\mathrm{o}\left(h\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1+h)\left(1-h+\mathrm{o}\left(h\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right).
\end{aligned}$$

La fonction f admet donc un maximum local en $a=1$ égal à $\dfrac{1}{2}$.

En particulier, la fonction se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Ce prolongement est également dérivable en 1 et $f'(1)=0$.

Exercice 17 : Donner un développement asymptotique en $o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ de arctan en $+\infty$ et en $-\infty$.

Correction : $\arctan(x)\underset{x\to+\infty}{=}\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ et $\arctan(x)\underset{x\to-\infty}{=}-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 18 : Calculer le développement asymptotique des fonctions suivantes :

1. $x\longmapsto \arctan(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 3.
2. $x\longmapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ à l'ordre 2.
3. $x\longmapsto \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2+1}}$ en $+\infty$ à l'ordre 6.

Correction :

1. $\arctan(x)\underset{x\to+\infty}{=}\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
2. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\underset{x\to+\infty}{=}\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}}{2x}+\dfrac{11}{24x^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
3. $\sqrt{\dfrac{x^4}{x^2+1}}\underset{x\to+\infty}{=}x-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{8x^3}-\dfrac{5}{16x^5}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$.
   Vous remarquerez que le développement asymptotique d'une fonction paire n'a aucune raison d'être pair. Ici, il est même impair.

Exercice 19 : Étude de f définie par $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x-3}}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction : On pose $h=\dfrac{1}{x}$, d'où $f(x)=f\left(\dfrac{1}{h}\right)=\dfrac{1}{h\sqrt[3]{1-3h}}$.

On effectue alors un développement limité à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}\left(1+h+2h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+1+2h+\mathrm{o}\left(h\right) \\ f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x+1+\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La courbe représentative de f admet donc la droite d'équation $y=x+1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

De plus, comme $\frac{2}{x}\geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

Exercice 20 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de leurs asymptotes en $\pm\infty$ et préciser la position de leurs graphes par rapport à celles-ci.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$
2. $g : x \longmapsto \sqrt{x^2-2x+2}$
3. $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}$
4. $k : x \longmapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$
5. $\varphi : x \longmapsto (x+2)^{\frac{1}{x}}$
6. $\psi : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3-x^2}$
7. $\xi : x \longmapsto \dfrac{1}{x+x^2}+2\arctan(x)$
8. $\zeta : x \longmapsto \dfrac{x^2-x+2}{x+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

Correction :

1. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$
2. $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x-1+\dfrac{1}{2x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. $h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x-1+\dfrac{3}{2x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
4. $k(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x-1+\dfrac{2}{3x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1+\dfrac{\ln(x)}{x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.
6. $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
7. $\xi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi-\dfrac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
8. $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{=} \left(x-2+\dfrac{4}{x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)=x-3+\dfrac{13}{2x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 21 : Montrer que la parabole d'équation $y=\mathrm{e}x^2+\dfrac{\mathrm{e}}{2}x-\dfrac{\mathrm{e}}{24}$ est asymptote à la courbe de f définie par :

$$f(x)=x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x},$$

et que la courbe de f est au-dessus de cette dernière.

Correction : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ex^2+\dfrac{e}{2}x-\dfrac{e}{24}+\dfrac{e}{48x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 22 : Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ possède une solution unique x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2} ; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.
4. En écrivant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ et en utilisant le résultat de la question 2 ., en déduire que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Correction :

1. La fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ est une bijection strictement croissante de l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2} ; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

   En effet, sa dérivée est égale à $1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$, qui est strictement positive sauf pour $x = n\pi$.

   On en déduit que l'équation $\tan(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2} ; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Il faut prendre garde au fait que arctan est la réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. Ainsi, on doit écrire :

$$\tan(x_n) = x_n \iff \tan(x_n - n\pi) = x_n$$

   et là, puisque x_n est élément de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, ceci est équivalent à

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n).$$

3. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la fonction arctan l'est aussi, la suite $(x_n - n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Puisqu'elle est majorée par $\frac{\pi}{2}$, elle est convergente, vers ℓ.

   Passant à la limite dans l'équation $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$, on trouve $\ell = \frac{\pi}{2}$.

   On peut donc bien écrire $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.
4. On commence par rappeler le développement limité de arctan en 0. Il s'obtient par intégration du développement limité de $\frac{1}{1+x^2}$.

   On a donc :

$$\arctan(x) = x + \mathrm{o}(x^2).$$

   On va avoir besoin du développement limité de arctan au voisinage de $+\infty$.

   Il s'obtient facilement à partir du développement limité précédent et de la relation $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, vraie pour $x > 0$.

   On obtient donc, au voisinage de $+\infty$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

   Utilisons maintenant la relation démontrée en 2 et ce développement limité de arctan.

   En posant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ on obtient :

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que :

$$\varepsilon_n = \frac{-1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

soit, en développant le terme de droite :

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{-1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{\pi n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-1}{n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ceci donne le développement limité souhaité pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 23 : On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$.

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in]0\,;+\infty[$, puis démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
4. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)$. On pourra poser a_n tel que $\dfrac{x_n}{n} = 1 + a_n$.
5. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
6. En admettant éventuellement le résultat de la question précédente, dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

   a. $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n - \ln(n)$
   b. $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n - 2\ln(n)$
   c. $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \mathrm{o}\left(\sqrt{\ln(n)}\right)$
   d. $x_n = n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Correction :

1. Posons f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

   Elle est continue et strictement croissante comme somme de fonctions continues et strictement croissantes.

   De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. f réalise donc une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution x_n.

   De plus, on a $f(x_n) = n < f(x_{n+1}) = n+1$. Puisque f est strictement croissante, ceci entraîne $x_n < x_{n+1}$, et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. Remarquons que
$$f(\ln(n)) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \leqslant 2\ln(n) < n = f(x_n),$$
   pour n assez grand.

   Ainsi, pour n assez grand, on a $x_n \geqslant \ln(n)$ et donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

3. On peut écrire $x_n = n - \ln(x_n)$.

   Or, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc $\ln(x_n) = \mathrm{o}(x_n)$.

   Autrement dit, on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

4 Posons a_n défini par $\dfrac{x_n}{n} = 1 + a_n$.
La relation $x_n + \ln(x_n) = n$ donne alors $na_n + \ln(n) + \ln(1 + a_n) = 0$, soit

$$a_n = -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(1 + a_n)}{n}.$$

Or, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $\ln(1 + a_n) = \mathrm{o}(\ln(n))$, ce qui donne

$$a_n = -\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right),$$

ce qui, reporté dans x_n, donne exactement le bon résultat :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)).$$

5 On procède de la même façon, en définissant cette fois une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\frac{x_n - n}{-\ln(n)} = 1 + b_n$$

avec (b_n) qui tend vers 0, soit encore

$$x_n = n - \ln(n)(1 + b_n).$$

L'égalité $x_n + \ln(x_n) = n$ donne

$$\ln(n)b_n = \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}(1 + b_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}(1 + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$$

puisque $\dfrac{\ln(n)}{n}(1 + b_n)$ tend vers 0, et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0.
Il vient $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n}$, soit $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{-1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ce qui en reportant dans x_n donne le résultat voulu :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

6 Toutes sont vraies, sauf la dernière ... Il suffit de revenir à la définition...