Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de* P *alors* $\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ *divise* P.
(on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : On considère $\mathrm{H}_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{H}_n' - 2\mathrm{X}\mathrm{H}_n$.
Déterminer $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$.
Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n.

Exercice 2 : Donner un développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 3 : Soit $u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
Convergence et limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Énoncer le lemme admis sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.*

Exercice 1 : $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Vérifier que i est racine de P. En déduire la factorisation complète de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_5(0)$ de : $\dfrac{1}{\cos x}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$
2. $n \ln \dfrac{n}{2n+1}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *α est une racine de P de multiplicité m si, et seulement si $\mathrm{P}(\alpha) = \mathrm{P}'(\alpha) = \mathrm{P}''(\alpha) = \cdots = \mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^4 + 1$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{x}{\sin x}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $\dfrac{n+1}{\sqrt{n} + \sin^2(n)}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de Taylor-Young.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_4(0)$ de : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$
2. $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\tan^2(x)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$
2. $e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^7 - 1$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_5(0)$ de : $\ln \frac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $n^{\frac{1}{n}} - 1$
2. $e^{-n}\mathrm{ch}\sqrt[4]{n^4+1}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Si* $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ *sont des racines distinctes de* P *alors* $\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ *divise* P.
(on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^4 + 1$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $n\left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$
2. $\ln(n+2) - \ln(n+1)$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Énoncer le lemme admis sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $1+X+X^2+X^3+X^4$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $e^{x\sin(x)}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $n\left(\sin\frac{1}{n}-\tan\frac{1}{2n}\right)$
2. $1-\cos\frac{\alpha}{n}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *α est une racine de P de multiplicité m si, et seulement si* $\mathrm{P}(\alpha) = \mathrm{P}'(\alpha) = \mathrm{P}''(\alpha) = \cdots = \mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *et* $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Sachant que le reste dans la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - a$ (respectivement $\mathrm{X} - b$) est 1 (respectivement -1), déterminer le reste dans le division euclidienne de P par $(\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $(1 + x)^x$.

Exercice 3 : Soit $u_n = \dfrac{\ln^n n}{n!}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2}$.

En déduire la limite de (u_n).

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de Taylor-Young.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $(X-2)^2$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_3(0)$ de : $\sqrt{1+\sin(x)}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
2. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+5}+\dfrac{4}{n^2}$
3. $\dfrac{n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $(X-3)(X-2)$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_7(0)$ de : $\sqrt{\cos(x)}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent de $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P = X^{2n} + 2X^n + 1$ par $Q_2 = X^2 + 1$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_3(0)$ de : $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 3 : Montrer que : $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de* P *alors* $\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ *divise* P*.*
(on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} + 2\mathrm{X}^n + 1$ par $\mathrm{Q}_1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

Exercice 3 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $a_n = n\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5}\right)$;
2. $b_n = \left[\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1\right] \ln n$;

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Énoncer le lemme admis sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.*

Exercice 1 : Soit $P = X^n$ et $Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.
Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_3(0)$ de : $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $c_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

2. $d_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *α est une racine de P de multiplicité m si, et seulement si* $\mathrm{P}(\alpha)=\mathrm{P}'(\alpha)=\mathrm{P}''(\alpha)=\cdots=\mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha)=0$ *et* $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

Exercice 1 : Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{X}^3+i\mathrm{X}^2+\mathrm{X}$ par $\mathrm{X}-i+1$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de : $\ln\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 3 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $e_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}$
2. $f_n=n-\sqrt{n^2+n+1}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de Taylor-Young.*

Exercice 1 : Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ $(a \neq b)$.
Donner le reste dans la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2}$. En déduire I_2 et I_3.
3. Déterminer la limite de I_n puis de $n\mathrm{I}_n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = (\cos\theta + \mathrm{X}\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que (I_n) est décroissante.
3. Déterminer la limite de I_n puis de $n\mathrm{I}_n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités.*

Exercice 1 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2+\sqrt{3})$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_3(0)$ de : $\dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(1+x)^2}$.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Montrer que les suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2+3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2-1})_{n\geqslant 1}$ sont convergentes et donner leur limite.

Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?