Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de* P *alors* $\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ *divise* P.
(on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : On considère $\mathrm{H}_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{H}'_n - 2\mathrm{X}\mathrm{H}_n$.
Déterminer $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$.
Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n.

Correction : $\mathrm{H}_0 = 1$

$\mathrm{H}_1 = -2\mathrm{X}$

$\mathrm{H}_2 = 4\mathrm{X}^2 - 2$

$\mathrm{H}_3 = -8\mathrm{X}^3 + 12\mathrm{X}$.

Exercice 2 : Donner un développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 3 : Soit $u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
Convergence et limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : $u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)} = \left[1 - \sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}}\right] n \sim -\frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}\right] n \sim -\frac{a+b}{2}$
car $a + b \neq 0$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Énoncer le lemme admis sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.*

Exercice 1 : $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Vérifier que i est racine de P. En déduire la factorisation complète de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_5(0)$ de : $\dfrac{1}{\cos x}$.

Correction : $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$
2. $n \ln \dfrac{n}{2n+1}$

Correction :

1. $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = e^{n\ln\left(1+3\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right)}$

   Or $n\ln\left(1+3\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right) \sim n\left(3\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right) \sim n\left(3\dfrac{\ln 2}{n} - 2\dfrac{\ln 3}{n}\right) \sim \ln\dfrac{9}{8}$.

   Ainsi $\boxed{\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n \sim \dfrac{9}{8}}$.

2. $n \ln \dfrac{n}{2n+1} \sim -n\ln 2$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *α est une racine de P de multiplicité m si, et seulement si* $\mathrm{P}(\alpha) = \mathrm{P}'(\alpha) = \mathrm{P}''(\alpha) = \cdots = \mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *et* $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^4 + 1$.

Correction : $\mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^4 + 1 = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}\sqrt{3} + 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}\sqrt{3} + 1)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{x}{\sin x}$.

Correction : $\dfrac{x}{\sin x} = 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{7}{360}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $\dfrac{n+1}{\sqrt{n} + \sin^2(n)}$

Correction :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
2. $\dfrac{n+1}{\sqrt{n} + \sin^2 n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de Taylor-Young.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$.
Correction : $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_4(0)$ de : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.
Correction : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$
2. $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Correction :

1. $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n \sim \dfrac{1}{2^n\sqrt{e}}$
2. $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \sim \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$.
Correction : $X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1 = (X^2 + 1)^3$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_7(0)$ de : $\tan^2(x)$.
Correction : $\tan^2(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{17}{45}x^6 + o(x^7)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$
2. $e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$

Correction :

1. $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n \sim e^{-2}$
2. $e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \sim \dfrac{1}{2n}$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^7 - 1$.

Correction : $X^7-1 = (X-1)\left(X^2 - 2X\cos\frac{2\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{4\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{6\pi}{7} + 1\right)$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_5(0)$ de : $\ln\frac{\sin(x)}{x}$.

Correction : $\ln\frac{\sin(x)}{x} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^5)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $n^{\frac{1}{n}} - 1$
2. $e^{-n}\operatorname{ch}\sqrt[4]{n^4+1}$

Correction :

1. $n^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$
2. $e^{-n}\operatorname{ch}\sqrt[4]{n^4+1} \sim \frac{1}{2}$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Si* $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ *sont des racines distinctes de* P *alors* $\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ *divise* P.
(on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^4 + 1$.
Correction : $\mathrm{X}^4 + 1 = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}\sqrt{2} + 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}\sqrt{2} + 1)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

Correction : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{13}{90}x^4 - \dfrac{251}{2835}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $n\left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$
2. $\ln(n+2) - \ln(n+1)$

Correction :

1. $n\left(\sqrt[n]{3} - 1\right) \sim \ln 3$
2. $\ln(n+2) - \ln(n+1) \sim \dfrac{1}{n}$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Énoncer le lemme admis sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.*

Exercice 1 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $1+X+X^2+X^3+X^4$.

Correction : $1+X+X^2+X^3+X^4 = \left(X^2 - 2X\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_6(0)$ de : $e^{x\sin(x)}$.

Correction : $e^{x\sin x} = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + o(x^6)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $n\left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{2n}\right)$
2. $1 - \cos\frac{\alpha}{n}$

Correction :

1. $n\left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2}$
2. $1 - \cos\frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha^2}{2n^2}$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *α est une racine de* P *de multiplicité m si, et seulement si* $\mathrm{P}(\alpha)=\mathrm{P}'(\alpha)=\mathrm{P}''(\alpha)=\cdots=\mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha)=0$ *et* $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a,b\in\mathbb{K}$. Sachant que le reste dans la division euclidienne de P par $\mathrm{X}-a$ (respectivement $\mathrm{X}-b$) est 1 (respectivement -1), déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $(1+x)^x$.

Correction : $(1+x)^x=1+x^2-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{5}{6}x^4-\dfrac{3}{4}x^5+\mathrm{o}(x^5)$.

Exercice 3 : Soit $u_n=\dfrac{\ln^n n}{n!}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{1}{2}$.

En déduire la limite de (u_n).

Correction : $\forall\, n\geqslant 2$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{\ln^{n+1}(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{\ln^n n}{n!}}=\frac{\ln^{n+1}(n+1)}{(n+1)\ln^n n}=\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n=\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^n.$$

Or $\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)}$.

Comme $\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\sim\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\sim\dfrac{1}{n\ln n}$, on a $n\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\sim\dfrac{1}{\ln n}$

et par conséquent $\lim\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^n=1$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$ et donc, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{1}{2}$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de Taylor-Young.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $(X-2)^2$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_3(0)$ de : $\sqrt{1+\sin(x)}$.

Correction : $\sqrt{1+\sin(x)} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+o(x^3)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
2. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+5}+\dfrac{4}{n^2}$
3. $\dfrac{n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}$

Correction :

1. $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n \sim 1$
2. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+5}+\dfrac{4}{n^2} \sim \dfrac{8}{n^2}$
3. $\dfrac{n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}} \sim -\dfrac{1}{\pi}$

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(\mathrm{X}-3)^{2n}+(\mathrm{X}-2)^n-2$ par $(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-2)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\sqrt{\cos(x)}$.

Correction : $\sqrt{\cos(x)}=1-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{96}x^4-\dfrac{19}{5760}x^6+\mathrm{o}(x^7)$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent de $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} + 2\mathrm{X}^n + 1$ par $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{X}^2 + 1$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction : $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{24}x^2 - \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 3 : Montrer que : $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de* P *alors* $\prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X}-\alpha_i)$ *divise* P.

(on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} + 2\mathrm{X}^n + 1$ par $\mathrm{Q}_1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1}$.

Correction : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 3 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $a_n = n\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5}\right)$;
2. $b_n = \left[\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1\right]\ln n$;

Correction :

1. $a_n = n\left((e^{\frac{\ln 3}{n}} - 1) - (e^{\frac{\ln 5}{n}} - 1)\right) \sim n\left(\dfrac{\ln 3}{n} - \dfrac{\ln 5}{n}\right) \sim \ln\dfrac{3}{5}$.
2. $b_n = \left[\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1\right]\ln n$.

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}.$$

Or $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \sim \dfrac{1}{n\ln n} \to 0$, on a donc $n\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) \sim n\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \sim \dfrac{1}{\ln n} \to 0$.

Donc $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1 = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)\right) - 1 \sim n\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) \sim \dfrac{1}{\ln n}$

Et enfin $b_n = \left[\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1\right]\ln n \sim \dfrac{1}{\ln n}\ln n = 1$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Énoncer le lemme admis sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.*

Exercice 1 : Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 1$.

Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Correction : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \times \left[1 - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{11}{24}\,x^2 - \dfrac{7}{16}\,x^3\right] + \mathrm{o}(x^3)$.

Exercice 3 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1 $c_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

2 $d_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Correction :

1 $c_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$

Or $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ et $e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \dfrac{1}{n^2}$. On peut additionner : $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim -\dfrac{3}{2n^2}$.

Or $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $c_n \sim -\dfrac{3}{2}$.

2 $d_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ $c_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$

Or $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ et $e^{-\frac{1}{2n^2}} - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$. On ne peut plus additionner.

Mais on peut écrire $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 = -\dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $e^{-\frac{1}{2n^2}} - 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Par conséquent, $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $d_n = \mathrm{o}(1)$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *α est une racine de P de multiplicité m si, et seulement si* $\mathrm{P}(\alpha) = \mathrm{P}'(\alpha) = \mathrm{P}''(\alpha) = \cdots = \mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *et* $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 1 : Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{X}^3 + i\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}$ par $\mathrm{X} - i + 1$.
Correction : $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + (-1+2i)\mathrm{X} - 3i$

$\mathrm{R} = 3 + 3i$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de : $\ln\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$.

Correction : $\ln\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{251}{2880}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

Exercice 3 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $e_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$
2. $f_n = n - \sqrt{n^2+n+1}$

Correction :

1. $e_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1} = n\exp\left((n+1)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$;

   Or $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ donc $(n+1)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim (n+1)\frac{2}{n} \sim 2$.

   D'où $e_n \sim e^2$.
2. $f_n = n - \sqrt{n^2+n+1} = n\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) \sim -n\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2}$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de Taylor-Young.*

Exercice 1 : Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ $(a \neq b)$.

Donner le reste dans la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Correction : $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{Q} + (u\mathrm{X}+v)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(a) = ua + v \\ \mathrm{P}(b) = ub + v \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u = \dfrac{\mathrm{P}(b)-\mathrm{P}(a)}{b-a} \\ v = \dfrac{b\mathrm{P}(a)-a\mathrm{P}(b)}{b-a} \end{cases}$$

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}(b)-\mathrm{P}(a)}{b-a}\mathrm{X} + \frac{b\mathrm{P}(a)-a\mathrm{P}(b)}{b-a}.$$

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

Correction : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \times \left[1 - \dfrac{1}{60}x^2\right] + \mathrm{o}(x^3)$.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer $I_n + I_{n+2}$. En déduire I_2 et I_3.
3. Déterminer la limite de I_n puis de nI_n.

Correction :

1. $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I_1 = \dfrac{\ln 2}{2}$.
2. $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $I_2 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$ et $I_3 = \dfrac{1-\ln 2}{2}$.
3. Inégalité de la moyenne : $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Or $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,dx\right| \leqslant \dfrac{1}{n+3} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\boxed{I_n \sim \dfrac{1}{2n}}$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels.*

Exercice 1 : Déterminer le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P} = (\cos\theta + \mathrm{X}\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Correction : $\mathrm{P} = (\cos\theta + \mathrm{X}\sin\theta)^n = (\mathrm{X}^2+1)\mathrm{Q} + (a\mathrm{X}+b)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(i) = ai+b \\ \mathrm{P}(-i) = -ai+b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} e^{ni\theta} = ai+b \\ e^{-ni\theta} = -ai+b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = \sin\theta \\ b = \cos\theta \end{cases}$$

$\mathrm{R} = \mathrm{X}\sin\theta + \cos\theta$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

Correction : $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) = 0 + o(x^6) = -\dfrac{1}{30}x^7 + o(x^7)$.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que (I_n) est décroissante.
3. Déterminer la limite de I_n puis de $n\mathrm{I}_n$.

Correction :

1. $\mathrm{I}_0 = \dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ et $\mathrm{I}_1 = \dfrac{4}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)$.
2. (I_n) est décroissante : AQT.
3. Inégalité de la moyenne : $|\mathrm{I}_n| \leqslant \sqrt{2}\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\sqrt{1+t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t.$$

On a $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ puis $\dfrac{1}{2(n+1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$

donc $\boxed{\mathrm{I}_n \sim \dfrac{\sqrt{2}}{n}}$.

Polynômes II et analyse asymptotique

Question de cours : *Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités.*

Exercice 1 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2+\sqrt{3})$.

Exercice 2 : Déterminer le $DL_3(0)$ de : $\dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(1+x)^2}$.

Correction : $\dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(1+x)^2} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Montrer que les suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2+3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2-1})_{n\geqslant 1}$ sont convergentes et donner leur limite.

Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n^2} = 0$ donc la suite extraite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + 3n < n^2 + 4n + 4$ donc $n + 1 \leqslant \sqrt{n^2 + 3n} < n + 2$ et $\lfloor(\rfloor \sqrt{n^2+3n}) = n + 1$.

  $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n^2+3n} = \sqrt{n^2+3n} - (n+1) = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+3n}+(n+1)} \sim \dfrac{n}{2n} \sim \dfrac{1}{2}$. Donc $u_{n^2+3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n^2 - 2n + 1 \leqslant n^2 - 1 < n^2$ donc $n - 1 \leqslant \sqrt{n^2-1} < n$ et $\lfloor(\rfloor \sqrt{n^2-1}) = n - 1$.

  $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n^2-1} = \sqrt{n^2-1} - (n-1) = \dfrac{2n-2}{\sqrt{n^2-1}+(n-1)} \sim \dfrac{2n}{2n} \sim 1$. Donc $u_{n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.