Fichiers DL-Suites a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
Convergence et limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : $u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)} = \left[1 - \sqrt{1 + \dfrac{a+b}{n} + \dfrac{ab}{n^2}}\right] n \sim -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a+b}{n} + \dfrac{ab}{n^2}\right] n \sim -\dfrac{a+b}{2}$
car $a+b \neq 0$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$
2. $n \ln \dfrac{n}{2n+1}$

Correction :

1. $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = e^{n\ln\left(1+3\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right)}$

   Or $n\ln\left(1+3\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right) \sim n\left(3\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right) \sim n\left(3\dfrac{\ln 2}{n} - 2\dfrac{\ln 3}{n}\right) \sim \ln\dfrac{9}{8}$.

   Ainsi $\boxed{\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n \sim \dfrac{9}{8}}$.
2. $n \ln \dfrac{n}{2n+1} \sim -n\ln 2$

Exercice 3 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $\dfrac{n+1}{\sqrt{n} + \sin^2(n)}$

Correction :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
2. $\dfrac{n+1}{\sqrt{n} + \sin^2 n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 4 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$
2. $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Correction :

1. $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n \sim \dfrac{1}{2^n\sqrt{e}}$
2. $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \sim \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

Exercice 5 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1 $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

2 $e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$

Correction :

1 $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n \sim e^{-2}$

2 $e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \sim \dfrac{1}{2n}$

Exercice 6 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1 $n^{\frac{1}{n}} - 1$

2 $e^{-n}\text{ch}\sqrt[4]{n^4+1}$

Correction :

1 $n^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{\ln n}{n}$

2 $e^{-n}\text{ch}\sqrt[4]{n^4+1} \sim \dfrac{1}{2}$

Exercice 7 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1 $n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$

2 $\ln(n+2) - \ln(n+1)$

Correction :

1 $n\left(\sqrt[n]{3}-1\right) \sim \ln 3$

2 $\ln(n+2) - \ln(n+1) \sim \dfrac{1}{n}$

Exercice 8 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1 $n\left(\sin\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{2n}\right)$

2 $1 - \cos\dfrac{\alpha}{n}$

Correction :

1 $n\left(\sin\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{2n}\right) \sim \dfrac{1}{2}$

2 $1 - \cos\dfrac{\alpha}{n} \sim \dfrac{\alpha^2}{2n^2}$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $u_n = \dfrac{\ln^n n}{n!}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2}$.
En déduire la limite de (u_n).

Correction : $\forall\, n \geqslant 2$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\ln^{n+1}(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{\ln^n n}{n!}} = \frac{\ln^{n+1}(n+1)}{(n+1)\ln^n n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^n.$$

Or $\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)}$.

Comme $\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) \sim \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \sim \dfrac{1}{n\ln n}$, on a $n\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) \sim \dfrac{1}{\ln n}$

et par conséquent $\lim\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^n = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et donc, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent et la limite de :

1. $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
2. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} + \dfrac{4}{n^2}$
3. $\dfrac{n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}$

Correction :

1. $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n \sim 1$
2. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} + \dfrac{4}{n^2} \sim \dfrac{8}{n^2}$
3. $\dfrac{n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}} \sim -\dfrac{1}{\pi}$

Exercice 3 : Déterminer un équivalent de $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Exercice 4 : Montrer que : $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $a_n = n\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{5}\right)$;
2. $b_n = \left[\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1\right]\ln n$;

Correction :

1. $a_n = n\left((e^{\frac{\ln 3}{n}}-1)-(e^{\frac{\ln 5}{n}}-1)\right) \sim n\left(\dfrac{\ln 3}{n}-\dfrac{\ln 5}{n}\right) \sim \ln\dfrac{3}{5}$.
2. $b_n = \left[\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1\right]\ln n$.

   $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$.

   Or $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \sim \dfrac{1}{n\ln n} \to 0$, on a donc $n\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) \sim n\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \sim \dfrac{1}{\ln n} \to 0$.

   Donc $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1 = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)\right) - 1 \sim n\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) \sim \dfrac{1}{\ln n}$

   Et enfin $b_n = \left[\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1\right]\ln n \sim \dfrac{1}{\ln n}\ln n = 1$.

Exercice 6 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $c_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

2. $d_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Correction :

1. $c_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$.

   Or $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ et $e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \dfrac{1}{n^2}$. On peut additionner : $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim -\dfrac{3}{2n^2}$.

   Or $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $c_n \sim -\dfrac{3}{2}$.

2. $d_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ $c_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n^2}}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$.

   Or $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ et $e^{-\frac{1}{2n^2}} - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$. On ne peut plus additionner.

   Mais on peut écrire $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 = -\dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $e^{-\frac{1}{2n^2}} - 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   Par conséquent, $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) - \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   Or $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $d_n = \mathrm{o}(1)$.

Exercice 7 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $e_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n+1}$

2. $f_n = n - \sqrt{n^2 + n + 1}$

Correction :

1. $e_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n+1} = n\exp\left((n+1)\ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)\right)$;

   Or $\ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$ donc $(n+1)\ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \sim (n+1)\dfrac{2}{n} \sim 2$.

   D'où $e_n \sim e^2$.

2. $f_n = n - \sqrt{n^2 + n + 1} = n\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}\right) \sim -n\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) \sim -\dfrac{1}{2}$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2}$. En déduire I_2 et I_3.
3. Déterminer la limite de I_n puis de $n\mathrm{I}_n$.

Correction :

1. $\mathrm{I}_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\mathrm{I}_1 = \dfrac{\ln 2}{2}$.
2. $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $\mathrm{I}_2 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$ et $\mathrm{I}_3 = \dfrac{1 - \ln 2}{2}$.

3 Inégalité de la moyenne : $|\mathrm{I}_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Or $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{1}{n+3} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\boxed{\mathrm{I}_n \sim \dfrac{1}{2n}}$.

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, \mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que (I_n) est décroissante.
3. Déterminer la limite de I_n puis de $n\mathrm{I}_n$.

Correction :

1 $\mathrm{I}_0 = \dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ et $\mathrm{I}_1 = \dfrac{4}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

2 (I_n) est décroissante : AQT.

3 Inégalité de la moyenne : $|\mathrm{I}_n| \leqslant \sqrt{2} \displaystyle\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\sqrt{1+t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{d}t.$$

On a $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ puis $\dfrac{1}{2(n+1)} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ donc $\boxed{\mathrm{I}_n \sim \dfrac{\sqrt{2}}{n}}$.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Montrer que les suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2+3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2-1})_{n\geqslant 1}$ sont convergentes et donner leur limite.

Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n^2} = 0$ donc la suite extraite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n^2+2n+1 \leqslant n^2+3n < n^2+4n+4$ donc $n+1 \leqslant \sqrt{n^2+3n} < n+2$ et $\lfloor (\rfloor \sqrt{n^2+3n}) = n+1$.

  $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n^2+3n} = \sqrt{n^2+3n} - (n+1) = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+3n}+(n+1)} \sim \dfrac{n}{2n} \sim \dfrac{1}{2}$. Donc $u_{n^2+3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n^2-2n+1 \leqslant n^2-1 < n^2$ donc $n-1 \leqslant \sqrt{n^2-1} < n$ et $\lfloor (\rfloor \sqrt{n^2-1}) = n-1$.

  $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n^2-1} = \sqrt{n^2-1} - (n-1) = \dfrac{2n-2}{\sqrt{n^2-1}+(n-1)} \sim \dfrac{2n}{2n} \sim 1$. Donc $u_{n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 4 : Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n|$.

2 On note $\theta_n = \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$ puis déterminer une suite équivalente à (θ_n).

3 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Correction :

1 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = e^x$.

2 $\theta_n \sim \frac{y}{n}$.

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^z$.

Exercice 5 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1 $g_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$

2 $h_n = \left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$

Correction :

1 $2^n+3^n \sim 3^n \to +\infty \neq 1$ donc $\ln(2^n+3^n) \sim \ln(3^n) \sim n\ln 3$ et $g_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(2^n+3^n)\right) \sim \exp\ln 3 = 3$.

Ou bien : $g_n = (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(2^n+3^n)\right)$.

Or $\dfrac{\ln(2^n+3^n)}{n} = \dfrac{n\ln 3 + \ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n} = \ln 3 + \dfrac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}$.

Or $\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $\dfrac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n} \to 0$ et $g_n \sim 3$.

2 $h_n = \left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2} = 1$, on peut écrire $\dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2} = 1 + \epsilon_n$.

Ainsi, $\ln\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2}\right) = \ln(1+\epsilon_n) \sim \epsilon_n$.

Mais $\epsilon_n = \dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2} - 1 = \dfrac{2^{\frac{1}{n}} - 1 + 3^{\frac{1}{n}} - 1}{2}$.

Et comme $2^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1 \sim \dfrac{\ln 2}{n}$ et $3^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln 3}{n}} - 1 \sim \dfrac{\ln 3}{n}$,

on a $\epsilon_n \sim \dfrac{2^{\frac{1}{n}} - 1 + 3^{\frac{1}{n}} - 1}{2} \sim \dfrac{\ln 2}{2n} + \dfrac{\ln 3}{2n} = \dfrac{\ln 6}{2n}$ (car $\ln 2 + \ln 3 \neq 0$).

Ainsi, $n\ln\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \sim n\epsilon_n \sim \dfrac{\ln 6}{2}$ et $h_n \to \sqrt{6}$.