Fichiers DL-Fonctions a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, le développement limité de f en 0.

Quelles conclusions en tirer ?

Exercice 2 : Effectuer l'étude locale en 0, de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$. Limite, tangente, position relative.

Exercice 3 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{x(x+1)}.$$

Correction : $y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x}$.

Exercice 4 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Correction : $y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x}$.

Exercice 5 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{x^2 - x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Correction : $y = x + \frac{1}{2} - \frac{9}{8x}$.

Exercice 6 : Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe d'équation $y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Préciser les positions relatives par rapport à ces asymptotes.

Correction : $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = x + 1 + \frac{3}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Delta : y = x + 1$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Δ.

$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = -x - 1 - \frac{3}{2x} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Delta' : y = -x - 1$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Δ'.

Exercice 7 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$.

Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

Correction : $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} = 2x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$\Delta : y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$. $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

Exercice 8 : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.

Correction : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Exercice 9 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$.

Correction :

1. On pose $x = \dfrac{1}{2} + h$.

$$(2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x = -\frac{2h^2 - h}{\tan \pi h} \sim -\frac{-h}{\pi h} \sim \frac{1}{\pi}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x = \frac{1}{\pi}}$$

2. On pose $x = 2 + h$.

$$\begin{aligned}(2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}} &= e^{\tan\frac{\pi x}{4}\ln(2^x+3^x-12)} = e^{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)\ln\left(4\times 2^h + 9\times 3^h - 12\right)} \\ &= e^{\dfrac{\ln\left(1 + 4\times(2^h-1) + 9\times(3^h-1)\right)}{-\tan\frac{\pi h}{4}}}.\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1 + 4\times(2^h-1) + 9\times(3^h-1)\right)}{-\tan\frac{\pi h}{4}} &\sim \frac{4\times(2^h-1) + 9\times(3^h-1)}{-\frac{\pi h}{4}} \sim \frac{4\times(e^{h\ln 2}-1) + 9\times(e^{h\ln 3}-1)}{-\frac{\pi h}{4}} \\ &\sim \frac{4h\ln 2 + 9h\ln 3}{-\frac{\pi h}{4}} \sim \frac{4\ln 2 + 9\ln 3}{-\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}} = (2^4\times 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}}$.

Exercice 10 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$.

Correction :

1. On pose $x = \dfrac{1}{2} + h$.

$$(2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x = -\frac{2h^2 - h}{\tan \pi h} \sim -\frac{-h}{\pi h} \sim \frac{1}{\pi}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x = \frac{1}{\pi}}$$

2 On pose $x = 2 + h$.

$$(2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}} = e^{\tan\frac{\pi x}{4}\ln(2^x+3^x-12)} = e^{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)\ln(4\times 2^h+9\times 3^h-12)}$$
$$= e^{\dfrac{\ln\left(1+4\times(2^h-1)+9\times(3^h-1)\right)}{-\tan\frac{\pi h}{4}}}.$$

Et,

$$\frac{\ln\left(1+4\times(2^h-1)+9\times(3^h-1)\right)}{-\tan\frac{\pi h}{4}} \sim \frac{4\times(2^h-1)+9\times(3^h-1)}{-\frac{\pi h}{4}} \sim \frac{4\times(e^{h\ln 2}-1)+9\times(e^{h\ln 3}-1)}{-\frac{\pi h}{4}}$$
$$\sim \frac{4h\ln 2+9h\ln 3}{-\frac{\pi h}{4}} \sim \frac{4\ln 2+9\ln 3}{-\frac{\pi}{4}}.$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}(2^x+3^x-12)^{\tan\frac{\pi x}{4}} = (2^4\times 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}}$.

Exercice 11 : Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\ln x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\tan\dfrac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos 3x}}$.

Correction :

1 $(\cos x)^{\ln x} = e^{\ln x\ln\cos x}$.

Or $\ln\cos x \sim \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ donc $\ln x\ln\cos x \sim -\dfrac{x^2\ln x}{2} \to 0$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\ln x} = 1}$.

2 On pose $x = \dfrac{\pi}{6} + h$.

$$\left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos 3x}} = e^{\frac{\ln\tan\frac{3x}{2}}{\cos 3x}} = e^{\frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3h}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)}} = e^{-\frac{1}{\sin 3h}\ln\frac{1+\tan\frac{3h}{2}}{1-\tan\frac{3h}{2}}}.$$

$$-\frac{1}{\sin 3h}\ln\frac{1+\tan\frac{3h}{2}}{1-\tan\frac{3h}{2}} = -\frac{1}{\sin 3h}\ln\left(1+\frac{2\tan\frac{3h}{2}}{1-\tan\frac{3h}{2}}\right) \sim -\frac{1}{3h}\frac{2\tan\frac{3h}{2}}{1-\tan\frac{3h}{2}} \sim -1$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\tan\dfrac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos 3x}} = e^{-1}}$.

Exercice 12 : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{ch}\,(x)}{1+\mathrm{sh}\,(x)}\right)^x$.

Correction : $\left(\dfrac{\mathrm{ch}\,(x)}{1+\mathrm{sh}\,(x)}\right)^x = e^{x\ln\frac{\mathrm{ch}\,(x)}{1+\mathrm{sh}\,(x)}} = e^{x\ln\left(1+\frac{\mathrm{ch}\,(x)-\mathrm{sh}\,(x)-1}{1+\mathrm{sh}\,(x)}\right)} = e^{x\ln\left(1+\frac{2e^{-x}-1}{1+\mathrm{sh}\,x}\right)}$.

$$x\ln\left(1+\frac{2e^{-x}-1}{1+\mathrm{sh}\,(x)}\right) \sim x\frac{2e^{-x}-1}{1+\mathrm{sh}\,(x)} \sim \frac{-x}{\mathrm{sh}\,(x)} \to 0.$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{ch}\,(x)}{1+\mathrm{sh}\,(x)}\right)^x = 1}$.

Exercice 13 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

2 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan \dfrac{x}{2}\right)^{\tan(x)}$

Exercice 14 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

2 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan \dfrac{x}{2}\right)^{\tan(x)}$

Exercice 15 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos(x)}$

Exercice 16 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - \sqrt{1+x}}{\tan(x)}$

2 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)}{2\cos(x) - 1}$

Exercice 17 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$

2 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) - 1}$

Exercice 18 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(x))^x - 1}{x^x - 1}$

2 $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Exercice 19 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2 + x^3}$

2 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^p - 1}$

Exercice 20 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

2 $\lim\limits_{x\to +\infty} (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$ avec $a > 0$ et $b > 0$

Exercice 21 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x+7} - 2\right)\sin(\pi x)}{\ln(x)}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$

Exercice 22 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3}{x^3 - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$

Exercice 23 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

2 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

Exercice 24 : Déterminer :

1 $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

2 $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+1} - x$

Exercice 25 : Déterminer :

1 $\lim_{x \to e} \dfrac{\sin(x) - \sin e}{\ln(x) - 1}$.

2 $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \arctan(x)}{x}$

Exercice 26 : Déterminer :

1 $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^p - 1}$

2 $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}$

Exercice 27 : Déterminer :

1 $\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{\ln(x)}}$

2 $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$.

Exercice 28 : Déterminer :

1 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) - 1}$

2 $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt[4]{x + 1} - \sqrt[4]{x - 1}\right)$

Exercice 29 : Déterminer :

1 $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)}{2\cos(x) - 1}$

2 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\tan \dfrac{x}{2}\right)^{\tan(x)}$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}} \end{array}$.

f est-elle prolongeable par continuité ?

Correction : $f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(e^x + 2x)}{x}}$.

$\dfrac{\ln(e^x + 2x)}{x} = \dfrac{x + \ln(1 + 2xe^{-x})}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1 + 2xe^{-x})}{x}$.

Or $\dfrac{\ln(1 + 2xe^{-x})}{x} \sim \dfrac{2xe^{-x}}{x} \sim 2e^{-x} \to 2$.

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = e^3$.

f est prolongeable par continuité en 0, et on pose $\hat{f}(0) = e^3$.

Exercice 2 : Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

1 Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2 Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.

3 étudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 3 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

Correction : $\sqrt[3]{x^2(x-2)} = x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9x} + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$\Delta : y = x - \dfrac{2}{3}$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$. $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de Δ au voisinage de $+\infty$ et au-dessus au voisinage de $-\infty$.

Exercice 4 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x \mapsto (x-3)^3 \ln \cos \frac{1}{x}$.
Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

Correction : $(x-3)^3 \ln \cos \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} - \frac{163}{12x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\Delta : y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$. $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de Δ au voisinage de $+\infty$ et au-dessus au voisinage de $-\infty$.

Exercice 5 : Étudier les branches infinies de la courbe de $f : x \mapsto \frac{x}{x-1}\sqrt{x^2-1}$.

Exercice 6 : Déterminer la limite de $(x^2+x-2)\tan\frac{\pi x}{2}$ lorsque x tend vers 1.

Correction : On pose $x = 1+h$. On a $(x^2+x-2)\tan\frac{\pi x}{2} = -\frac{h^2+3h}{\tan\frac{\pi h}{2}} \sim -\frac{h(h+3)}{\frac{\pi h}{2}} \sim -\frac{2(h+3)}{\pi}$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\frac{\pi x}{2} = -\frac{6}{\pi}}$.

Exercice 7 :

1. Calculer $\ell = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$.
2. Donner un équivalent de $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - \ell$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction :

$$\ln(x+1) = \ln\left(x \times \left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \\
&= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \\
&= 1+\frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1$$

et que lorsque $x \to +\infty$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Exercice 8 : Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos(a)}\right)^x$ où $\cos(a)\neq 0$.

Correction : Quand x tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} x\ln\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos(a)}\right) &= x\ln\left(\cos\frac{1}{x}-\tan(a)\sin\frac{1}{x}\right)\\ &= x\ln\left(1-\frac{\tan(a)}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(-\frac{\tan(a)}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= -\tan(a)+o(1), \end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos(a)}\right)^x = e^{-\tan(a)}$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Soit $f : x \longmapsto \arccos(4x^3-3x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.
4. Tracer la courbe de f.

Correction :

1. Soit $\phi : x \longmapsto 4x^3-3x$.

   ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\quad \phi'(x)=3(4x^2-1)=3(2x-1)(2x+1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   De plus, $\phi(-1)=-1$ et $\phi(1)=1$. On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R},\quad \phi(x)\in[-1,1] \iff x\in[-1,1]$.

   La fonction f est donc définie sur $\boxed{\mathcal{D}=[-1,1]}$.

2. Sur $\mathcal{D}$, f est continue comme composée de fonctions continues.

3. $\forall x \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},1\right[,\quad \phi(x)\in]-1,1[$.

   Donc la fonction f est dérivable sur cet ensemble comme composée de fonctions dérivables.

   Et $\forall x \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},1\right[,\quad f'(x)=-\frac{3(2x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-(4x^3-3x)^2}}=-\frac{3(2x-1)(2x+1)}{\sqrt{(1+3x-4x^3)(1-3x+4x^3)}}$.

   – Étude de la dérivabilité en $\frac{1}{2}$.

On pose $x = \dfrac{1}{2} + h$. On a $3x - 4x^3 = 1 - 6h^2 - 4h^3$.

$$f'\left(\frac{1}{2}+h\right) = -\frac{3(2h)(2+2h)}{\sqrt{(1+3x-4x^3)(1-3x+4x^3)}} = -\frac{12h(1+h)}{\sqrt{(2-6h^2-4h^3)(6h^2+4h^3)}}$$
$$= -\frac{12h(1+h)}{|h|\sqrt{(2-6h^2-4h^3)(6+4h)}}.$$

On a donc $f'\left(\dfrac{1}{2}+h\right) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \sqrt{12}$. On en déduit que comme f est continue en $\dfrac{1}{2}$, d'après le théorème du point d'arrêt, f est dérivable à droite en $\dfrac{1}{2}$ et $\boxed{f'_d\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}}$.

De même, on a $f'\left(\dfrac{1}{2}+h\right) \xrightarrow[h\to 0^-]{} -\sqrt{12}$. On en déduit que comme f est continue en $\dfrac{1}{2}$, d'après le théorème du point d'arrêt, f est dérivable à gauche en $\dfrac{1}{2}$ et $\boxed{f'_g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3}}$.

Comme ces dérivées ne sont pas égales, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } \dfrac{1}{2}}$.

- Etude de la dérivabilité en 1.
  On a $f'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en 1. Sa courbe présente une demi-tangente verticale en ce point.

La fonction ϕ étant impaire, on a $\forall x \in [-1,1]$, $\quad f(-x) = \arccos(-\phi(x)) = \pi - \arccos(\phi(x)) = \pi - f(x)$.

On peut en déduire que f n'est pas dérivable non plus en $-\dfrac{1}{2}$ et en -1.

Exercice 2 : Soit $f : x \mapsto \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt[4]{x^2-1}$.
f admet-elle une limite en $+\infty$?

Correction : $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt[4]{x^2-1} = \sqrt{x}\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1-\dfrac{1}{x^2}}\right) \sim \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{-1}{4x^2}\right) \sim \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \to 0.$

Exercice 3 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)}$.
f est-elle prolongeable par continuité en 0, en 1, en -1 ?

Correction :

En 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x} \sim -1\dfrac{\pi x}{x} \sim -\pi$.

f est prolongeable par continuité en 0, et on pose $\hat{f}(0) = -\pi$.

En 1 : On pose $x = 1 + h$.

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(1+h))}{(1+h)(h^2+2h)} = \frac{-\sin(\pi h)}{h(1+h)(h+2)} \sim \frac{-\pi h}{h(1+h)(h+2)} \sim \frac{-\pi}{(1+h)(h+2)} \to \frac{-\pi}{2}.$$

f est prolongeable par continuité en 1, et on pose $\hat{f}(1) = \dfrac{-\pi}{2}$.

En -1 : f est paire donc f est prolongeable par continuité en -1, et on pose $\hat{f}(-1) = \dfrac{-\pi}{2}$.

Exercice 4 : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$, $g(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde en 0.

Exercice 5 : Limite en 0 de $x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.

Correction : $\forall x \neq 0, \frac{1}{x}-1 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$ donc $\forall x>0, 1-x \leqslant x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1$ et $\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1$. De même $\forall x<0, 1-x \geqslant x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \geqslant 1$ et $\lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1$.

$\boxed{\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1.}$

Exercice 6 : Limite en 0 de $x^2\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.

Correction : $\forall x \leqslant 0, x-x^2 \leqslant x^2\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant x$ d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} x^2\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0.}$

Exercice 7 : Limite en 0 de $\sin\left(x\left\lfloor \frac{\pi}{x}\right\rfloor\right)$.

Correction : $\forall x \neq 0, \frac{\pi}{x}-1 < \left\lfloor \frac{\pi}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{\pi}{x}$.

Donc $\forall x>0, \pi-x < x\left\lfloor \frac{\pi}{x}\right\rfloor \leqslant \pi$. idem lorsque $x>0$ donc $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{\pi}{x}\right\rfloor = \pi$, d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \sin\left(x\left\lfloor \frac{\pi}{x}\right\rfloor\right) = 0.}$

Exercice 8 : Limite en 0 de $\frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x}\rfloor}}{x}$.

Correction : Si $x=\frac{1}{2n}$ alors on obtient $\frac{(-1)^{2n}}{2n}=\frac{1}{2n}\to+\infty$.

Si $x=\frac{1}{2n+1}$ alors on obtient $\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\to-\infty$.

Pas de limite.

Exercice 9 : Limite en $+\infty$ de $\frac{x^2\sin(x)}{x^2+1}$.

Correction : $\frac{x^2\sin(x)}{x^2+1}=\frac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x^2}}$.

Si $x=n\pi$ alors on obtient $\frac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x^2}}=0\to 0$.

Si $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ alors on obtient $\frac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2}}\to 1$.

Pas de limite.

Exercice 10 : Soit $f : x\mapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$.

La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Correction : $f(x)=\frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x)\rfloor}}=\frac{e^{x\ln(x)}}{e^{\lfloor x\rfloor\ln\lfloor x\rfloor}}=e^{x\ln(x)-\lfloor x\rfloor\ln\lfloor x\rfloor}$.

Par conséquent,

- en posant $u_n=n$, on a $\forall n\in\mathbb{N}, f(u_n)=1$
- en posant $v_n=n+\frac{1}{2}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}, f(v_n)=e^{(n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2})-n\ln n}=e^{\frac{1}{2}\ln(n+\frac{1}{2})+n\ln(1+\frac{1}{2n})}\to+\infty$.