Fichiers DL-Calculs a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Donner un développement limité à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{1}{\cos x}$.

Correction : $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

Exercice 3 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{x}{\sin x}$.

Correction : $\dfrac{x}{\sin x} = 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{7}{360}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

Exercice 4 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Correction : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

Exercice 5 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\tan^2(x)$.

Correction : $\tan^2(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{17}{45}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

Exercice 6 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\ln\dfrac{\sin(x)}{x}$.

Correction : $\ln\dfrac{\sin(x)}{x} = -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

Exercice 7 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\ln\dfrac{\arctan(x)}{x}$.

Correction : $\ln\dfrac{\arctan(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{13}{90}x^4 - \dfrac{251}{2835}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

Exercice 8 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $e^{x\sin(x)}$.

Correction : $e^{x\sin x} = 1 + x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{1}{120}x^6 + \mathrm{o}(x^6)$.

Exercice 9 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $(1+x)^x$.

Correction : $(1+x)^x = 1 + x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{6}x^4 - \dfrac{3}{4}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$.

Exercice 10 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\sqrt{1+\sin(x)}$.

Correction : $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{8}\,x^2 - \dfrac{1}{48}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3).$

Exercice 11 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\sqrt{\cos(x)}$.

Correction : $\sqrt{\cos(x)} = 1 - \dfrac{1}{4}\,x^2 - \dfrac{1}{96}\,x^4 - \dfrac{19}{5760}\,x^6 + \mathrm{o}(x^7).$

Exercice 12 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction : $\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{24}x^2 - \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3).$

Exercice 13 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

Correction : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3).$

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Correction : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \times \left[1 - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{11}{24}\,x^2 - \dfrac{7}{16}\,x^3\right] + \mathrm{o}(x^3).$

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de : $\ln\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$.

Correction : $\ln\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{5}{24}\,x^2 - \dfrac{1}{8}\,x^3 + \dfrac{251}{2880}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4).$

Exercice 3 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

Correction : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \times \left[1 - \dfrac{1}{60}\,x^2\right] + \mathrm{o}(x^3).$

Exercice 4 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

Correction : $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) = 0 + o(x^6) = -\dfrac{1}{30}x^7 + o(x^7).$

Exercice 5 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(1+x)^2}$.

Correction : $\dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(1+x)^2} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3).$

Exercice 6 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de : $\ln^2(\cos(x))$.

Correction : $\ln^2(\cos(x)) = \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^5)$.

Exercice 7 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$.

Correction : $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) = \ln(2) + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{32}x^2 + \dfrac{5}{96}x^3 - \dfrac{35}{1024}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 8 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}$.

Correction : $\dfrac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)} = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{90}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 9 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\ln\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)$.

Correction : $\ln\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right) = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{5}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 10 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^{\sqrt{\cos(x)}}$.

Correction : $e^{\sqrt{\cos(x)}} = e - \dfrac{e}{4}x^2 + \dfrac{e}{48}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 11 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{1-\ln(1+x)}$.

Correction : $\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{1-\ln(1+x)} = x + x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 12 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$.

Correction : $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de : $\dfrac{1+\mathrm{th}\,(x)}{1-\mathrm{th}\,(x)}$.

Correction : $\dfrac{1+\mathrm{th}\,(x)}{1-\mathrm{th}\,(x)} = 1 + 2\,x + 2\,x^2 + \dfrac{4}{3}\,x^3 + \dfrac{2}{3}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

Exercice 2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $(\cos(x))^p$.

Correction : $(\cos(x))^p = 1 - \dfrac{p}{2}x^2 + \dfrac{p(3p-2)}{24}x^4 - \dfrac{p[15(p-1)^2+1]}{720}x^6 + \mathrm{o}(x^6)$.

Exercice 3 : Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de : $\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^p$.

Correction : $\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^p = 1 + \dfrac{p}{2}\,x + \dfrac{p\,(p+1)}{8}\,x^2 + \text{o}(x^2).$

Exercice 4 : Déterminer le $\text{DL}_5(0)$ de : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^p$.

Correction : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^p = 1 - \dfrac{p}{6}\,x^2 + \dfrac{p\,(5p-2)}{360}\,x^4 + \text{o}(x^5).$

Exercice 5 : Déterminer le $\text{DL}_3(\alpha)$ de $\cos(x)$.

Correction : $\cos(x) = \cos\alpha - (\sin\alpha)(x-a) - \dfrac{\cos\alpha}{2}(x-a)^2 + \dfrac{\sin\alpha}{6}(x-a)^2 + o((x-\alpha)^3).$

Exercice 6 : Déterminer le $\text{DL}_4(0)$ de $e^{\arcsin(x)} - e^{\sin(x)}$.

Correction : $e^{\arcsin(x)} - e^{\sin(x)} = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4).$

Exercice 7 : Déterminer le $\text{DL}_5(0)$ de $(\cos(x))^{\sin(x)}$.

Correction : $(\cos(x))^{\sin(x)} = 1 - \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^4).$

Exercice 8 : Déterminer le $\text{DL}_4(0)$ de $e^{\ln(\cos(x))}$.

Exercice 9 : Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$.

Exercice 10 : Soit $f(x) = \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$.
Déterminer le $\text{DL}_{n+1}(0)$ de f.

Correction : On a :

$$f(x) = \ln\left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \text{o}(x^{n+1})\right) = x + \ln\left(1 - \frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} + \text{o}(x^{n+1})\right) = x + \ln\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \text{o}(x^{n+1})\right).$$

D'où $f(x) = x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \text{o}(x^{n+1}).$

Exercice 11 : Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(x) - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit un $o(x^n)$ en 0 avec n le plus grand possible.
Application ?

Correction : Le dl de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 6 est :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Calculons celui de $\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2)\times\frac{1}{1+bx^2}\\
&= (1+ax^2)\times(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)) \qquad \text{car } \frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3+o(u^3)\\
&= \cdots \qquad \text{on développe}\\
&= 1+(a-b)x^2-b(a-b)x^4+b^2(a-b)x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

Notons $\Delta(x) = \cos(x) - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ alors

$$\Delta(x) = (-\frac{1}{2}-(a-b))x^2 + (\frac{1}{24}+b(a-b))x^4 + (-\frac{1}{720}-b^2(a-b))x^6 + o(x^6).$$

Pour que cette différence soit la plus petite possible (lorsque x est proche de 0) il faut annuler le plus possible de coefficients de bas degré. On souhaite donc avoir

$$-\frac{1}{2}-(a-b) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{24}+b(a-b) = 0.$$

En substituant l'égalité de gauche dans celle de droite on trouve :

$$a = -\frac{5}{12} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{12}.$$

On obtient alors

$$\Delta(x) = (-\frac{1}{720}-b^2(a-b))x^6 + o(x^6) = \frac{1}{480}x^6 + o(x^6).$$

Avec notre choix de a, b nous avons obtenu une très bonne approximation de $\cos(x)$. Par exemple lorsque l'on évalue $\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ (avec $a = -\dfrac{5}{12}$ et $b = \dfrac{1}{12}$) en $x = 0.1$ on trouve :

$$0.9950041631\ldots$$

Alors que

$$\cos(0.1) = 0.9950041652\ldots$$

En l'on trouve ici $\Delta(0.1) \simeq 2\times 10^{-9}$.

Exercice 12 : Déterminer le réel λ tel que $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt[3]{x^3+\lambda x^2+1}$ admette pour limite 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

Déterminer alors un équivalent de f au voisinage de $-\infty$.

Correction : $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.