XXIII

Espaces vectoriels

$\vec{\mathcal{P}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}[X]$	$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$	$f-2g$	$3P+2Q$	$3A+2B$	$3(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+2(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\vec{0}$	$x\longmapsto 0_{\mathbb{R}}$	$0_{\mathbb{R}[X]}$	$(0)_{n,p}$	$(0)_{n\in\mathbb{N}}$

Figure XXIII.1 – Exemples d'espaces vectoriels

E	T	$T(\lambda x+y)=\lambda T(x)+T(y)$
$\mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$	$f\longmapsto f'$	$(\lambda f+g)'=\lambda f'+g'$
$\mathbb{R}[X]$	$P\longmapsto P'$	$(\lambda P+Q)'=\lambda P'+Q'$
$\mathscr{C}^0(x_0)$	$f\longmapsto \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f(x)+g(x))=\lambda\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y)\longmapsto ax+by,\ a,b\in\mathbb{R}$	$a(\lambda x+x')+b(\lambda y+y')=\lambda(ax+by)+(ax'+by')$
$\mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$	$f\longmapsto\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
{ Suites convergentes }	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n+v_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x}\longmapsto\vec{a}\cdot\vec{x}$	$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{x})+(\vec{a}\cdot\vec{y})$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x}\longmapsto[\vec{a}\,;\vec{x}]$	$[\vec{a}\,;\lambda\vec{x}+\vec{y}]=\lambda[\vec{a}\,;\vec{x}]+[\vec{a}\,;\vec{y}]$
$\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$	$f\longmapsto f'+af,\ a\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$	$(\lambda f+g)'+a(\lambda f+g)=\lambda(f'+af)+(g'+ag)$
$\mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$	$f\longmapsto f''+af'+bf,\ a,b\in\mathbb{R}$	$(\lambda f+g)''+a(\lambda f+g)+b(\lambda f+g)=\lambda(f''+af'+bf)+(g''+ag'+bg)$

Figure XXIII.2 – Applications linéaires et espaces vectoriels

Contenu

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel

I.1 Généralités

Définition 1 : Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

- Une loi de composition interne notée + (l'addition) :

$$+_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

- Une loi de composition externe, notée $\cdot$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\cdot_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$$

On dit que $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +)$ est un groupe abélien, *i.e.*

   a. $+_{\mathrm{E}}$ est *associative* : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$, $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.

   b. $+_{\mathrm{E}}$ est *commutative* : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.

   c. $+_{\mathrm{E}}$ admet un *élément neutre* noté 0_{E} et appelé *vecteur nul* :

   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$

   d. Tout élément de E admet un *symétrique* pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé *opposé de* x et noté $-x$:

   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} (-x) = 0_{\mathrm{E}}.$$

2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

   a. $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\quad \lambda.{}_{\mathrm{E}}(\mu.{}_{\mathrm{E}}x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu).{}_{\mathrm{E}}x$: *compatibilité avec* $\times_{\mathbb{K}}$ *dans* $\mathbb{K}$.

   b. $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\quad (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).{}_{\mathrm{E}}x = \lambda.{}_{\mathrm{E}}x +_{\mathrm{E}} \mu.{}_{\mathrm{E}}x$: *compatibilité* $+_{\mathbb{K}}$ *dans* $\mathbb{K}$.

   c. $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda.{}_{\mathrm{E}}(x +_{\mathrm{E}} y) = \lambda.{}_{\mathrm{E}}x +_{\mathrm{E}} \lambda.{}_{\mathrm{E}}y$: *compatibilité avec* $+_{\mathrm{E}}$ *dans* E.

   d. $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\quad 1_{\mathbb{K}}.{}_{\mathrm{E}}x = x$: $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre pour $\cdot_{\mathrm{E}}$.

On appelle :

- *vecteurs* les éléments de E.
- *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que $\mathbb{K}$ est le *corps de base* de l'espace vectoriel E.

ATTENTION

— Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{K}}$ avec le vecteur nul 0_{E} : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.

— La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y)\in \mathrm{E}^3,\quad x+y=x'+y \implies x=x'$.
2. $\forall\ (\lambda\,;x)\in\mathbb{K}\times\mathrm{E},\ (-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x)$.

   En particulier, $\quad(-1_{\mathbb{K}}).x=-x$.
3. $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\quad \lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y$.
4. $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall\,x\in\mathrm{E},\quad (\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x$.
5. $\forall\,x\in\mathrm{E},\quad 0_{\mathbb{K}}.x=0_{\mathrm{E}}$ et $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}$.

Réciproquement, $\forall\ (\lambda\,;x)\in\mathbb{K}\times\mathrm{E}$,

$$\lambda.x=0_{\mathrm{E}}\implies \lambda=0_{\mathbb{K}}\quad\text{ou}\quad x=0_{\mathrm{E}}.$$

En particulier,

6. Si $\lambda\neq 0$, alors $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\quad \lambda.x=\lambda.y\implies x=y$.
7. Si $x\neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \ \lambda.x=\mu.x\implies\lambda=\mu$.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$ev. On munit l'ensemble $\mathrm{F}=\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ de l'addition usuelle et on définit une loi de composition externe $\cdot$ par $(a+ib)\cdot(x,y)=(ax-by,ay+bx)$.

Montrer que $(\mathrm{F},+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$ev.

I.2 Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathbb{K}$ **:** L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathbb{K}}}=0_{\mathbb{K}}$ et muni des lois :

$$+:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{K}\times\mathbb{K}&\longrightarrow&\mathbb{K}\\(x\,;y)&\longmapsto&x+y=x+_{\mathbb{K}}y\end{array}$$

et

$$\cdot:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{K}\times\mathbb{K}&\longrightarrow&\mathbb{K}\\(\lambda\,;x)&\longmapsto&\lambda\cdot x=\lambda\times_{\mathbb{K}}x.\end{array}$$

Proposition 2 : $(\mathbb{K}\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En particulier, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On peut voir aussi $\mathbb{C}$ est comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe :

$$\cdot:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{C}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\(\lambda\,;z)&\longmapsto&\lambda.z=\lambda z\quad(\text{produit dans }\mathbb{C})\end{array}$$

Remarque : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$-ev.

$\mathbb{K}^n$ **:** De manière générale, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{K}^n$ les lois :

$$+:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n&\longrightarrow&\mathbb{K}^n\\((x_1,\,x_2,\,\dots,\,x_n)\,;(y_1,\,y_2,\,\dots,\,y_n))&\longmapsto&(x_1+y_1,\,x_2+y_2,\,\dots,\,x_n+y_n)\end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (\lambda\,;(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \dots,\, \lambda x_n) \end{array}.$$

Proposition 3 : L'ensemble $(\mathbb{K}^n\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathbb{K}^n}} = (0,\, 0\, \dots,\, 0)$.

E^n : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n espaces vectoriels $\left(\mathrm{E}_1\,;+_{\mathrm{E}_1}\,;\cdot_{\mathrm{E}_1}\right)$, ..., $\left(\mathrm{E}_n\,;+_{\mathrm{E}_n}\,;\cdot_{\mathrm{E}_n}\right)$ tous sur $\mathbb{K}$ et le produit cartésien

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \dots \times \mathrm{E}_n = \left\{(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n) \,/\, \forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ x_i \in \mathrm{E}_i\right\}.$$

On définit sur E les lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ ((x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)\,;(y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n)) & \longmapsto & (x_1 +_{\mathrm{E}_1} y_1,\, x_2 +_{\mathrm{E}_2} y_2,\, \dots,\, x_n +_{\mathrm{E}_n} y_n) \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda\,;(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)) & \longmapsto & (\lambda.{}_{\mathrm{E}_1} x_1,\, \lambda.{}_{\mathrm{E}_2} x_2,\, \dots,\, \lambda.{}_{\mathrm{E}_n} x_n) \end{array}.$$

Proposition 4 : L'ensemble $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}} = (\overrightarrow{0_{\mathrm{E}_1}},\, \overrightarrow{0_{\mathrm{E}_2}}\, \dots,\, \overrightarrow{0_{\mathrm{E}_n}})$.

Exemple 1 : Si on note $x = (x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n) \in \mathrm{E}$ et $y = (y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n) \in \mathrm{E}$ alors, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \cdot_{\mathrm{E}} x +_{\mathrm{E}} y = \begin{pmatrix} \lambda.{}_{\mathrm{E}_1} x_1 +_{\mathrm{E}_1} y_1 \\ \vdots \\ \lambda.{}_{\mathrm{E}_n} x_n +_{\mathrm{E}_1} y_n \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: On munit $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\,;(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \left(\lambda\,;(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}. \end{array}$$

Proposition 5 : L'ensemble $\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}} = (0)_{n,p}$.

ATTENTION | Toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

$\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{E})$: Soient Ω un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{E})$, noté aussi E^{Ω} des fonctions de Ω à valeurs dans E peut être munis des lois :

$$+ : \begin{array}{ccl} \mathrm{E}^{\Omega}\times\mathrm{E}^{\Omega} & \longrightarrow & \mathrm{E}^{\Omega} \\ (f\,;g) & \longmapsto & \mathrm{f+g} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longmapsto & \mathrm{E} \\ x & & f(x) +_{\mathrm{E}} g(x) \end{array} \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccl} \mathbb{K}\times\mathrm{E}^{\Omega} & \longrightarrow & \mathrm{E}^{\Omega} \\ (\lambda\,;f) & \longmapsto & \lambda.\mathrm{f} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longmapsto & \mathrm{E} \\ x & & \lambda \cdot_{\mathrm{E}} f(x) \end{array} \end{array}$$

Proposition 6 : Si Ω est non vide alors l'ensemble $(\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{E})\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathcal{F}(\Omega;\mathrm{E})}}$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\Omega;\mathrm{E})} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & 0_{\mathrm{E}} \end{array}$.

ATTENTION | $\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{Y})$ n'est, en général, pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois) si Y n'est pas un $\mathbb{K}$-ev.

Corollaire 6.1 : L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{K}}$.

$\mathbb{K}[\mathrm{X}]$: L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de vecteur nul le polynôme nul et muni des lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}]\times\mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \left(\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k\,;\sum\limits_{k\geqslant 0} b_k\mathrm{X}^k\right) & \longmapsto & \sum\limits_{k\geqslant 0}(a_k+b_k)\,\mathrm{X}^k \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \left(\lambda\,;\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k\right) & \longmapsto & \lambda\cdot\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k = \sum\limits_{k\geqslant 0}(\lambda a_k)\,\mathrm{X}^k. \end{array}$$

En particulier, on a également vu que l'ensemble $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

ATTENTION | L'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.
2. $\varnothing$.
3. $\{0, 1\}$.
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$.
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.
6. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est croissante}\}$.

I.3 Combinaisons linéaires

Définition 2 : Soit $(\mathrm{E} ; + ; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et x_1, x_2, ..., $x_p \in \mathrm{E}$.

  On dit que $x \in \mathrm{E}$ est *combinaison linéaire* des vecteurs x_1, x_2, ..., x_p de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2 + \dots + \lambda_p . x_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot x_k .$$

- Soit X une partie de E.

  On dit que $x \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si x est combinaison linéaire d'une famille ***finie*** de vecteurs de X.

ATTENTION

Il n'y a pas, a priori, unicité des coefficients sans hypothèse supplémentaire sur $(x_1, \dots, x_n)$: sauf information supplémentaire

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k \cancel{\Longrightarrow} \forall\, k \in [\![1 ; p]\!] , \quad \lambda_k = \mu_k .$$

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1 ; 2 ; 0)$ est combinaison linéaire de $(1 ; 1 ; 0)$ et $(0 ; 1 ; 0)$, mais pas de $(1 ; 1 ; 0)$ et $(0 ; 1 ; 1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_{E} est $\{0_{\mathrm{E}}\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda . u \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u.
- Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R} ; \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \cos 3x$.
- Si $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R} ; \mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

  Plus précisément, $f \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si f est une fonction polynomiale.

- Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

- Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des $\mathrm{E}_{i,j}$ pour $(i ; j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; p]\!]$.

II Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Soit $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathrm{F}\subset\mathrm{E}$.

On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E, abrégé souvent en *sev* lorsque :

- $\mathrm{F}\neq\varnothing$
- $\forall\,(x\,;y)\in\mathrm{F}^2,\quad x+_{\mathrm{E}}y\in\mathrm{F}$ *(stabilité de F pour $+_{\mathrm{E}}$)*
- $\forall\,x\in\mathrm{F},\,\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda._{\mathrm{E}}x\in\mathrm{F}$ *(stabilité de F pour $\cdot_{\mathrm{E}}$)*

Exemple 3 : Si E est un $\mathbb{K}$-ev alors $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E sont des sev de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).

Ce sont, respectivement, le plus petit et le plus grand sev au sens de l'inclusion.

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_{E} : en effet, $\mathrm{F}\neq\varnothing$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_{\mathrm{E}}=\underbrace{x+_{\mathrm{E}}(-x)}_{\in\mathrm{E}}\in\mathrm{F}.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_{\mathrm{E}}\in\mathrm{F}$. A contrario, une partie ne contenant pas 0_{E} ne pourra être un sev de E.

ATTENTION Aucun $\mathbb{K}$-ev, $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}$-ev ou sev n'est vide !!!!

Corollaire 6.2 (Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires) :

$$\mathrm{F}\text{ est un sev de E}\iff\begin{cases}0_{\mathrm{E}}\in\mathrm{F}\\ \forall\,(x\,;y)\in\mathrm{F}^2,\,\forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\,\lambda.x+\mu.y\in\mathrm{F}.\end{cases}$$

Remarque : Mieux, on vérifiera que montrer que F est stable par des combinaisons linéaires du type $\lambda.x+y$ est équivalent à montrer que F est stable par combinaisons linéaires.

Le corollaire (6.2) nous entraîne à considérer les lois :

$$\begin{array}{rccc}+_{\mathrm{F}}: & \mathrm{F}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F}\\ & (x\,;y) & \longmapsto & x+_{\mathrm{E}}y\end{array}\qquad\text{et}\qquad\begin{array}{rccc}\cdot_{\mathrm{F}}: & \mathbb{K}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F}\\ & (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda._{\mathrm{E}}x\end{array}.$$

Théorème 7 : Soit F un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$.

Alors, $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{K}$-ev.

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u}\in\vec{\mathcal{E}}_3$.

  L'ensemble $(\mathscr{D})=\mathbb{R}\vec{u}=\{\lambda\vec{u},\lambda\in\mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.

- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.

  L'ensemble $\mathrm{P} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- Dans le plan, une droite $(\mathscr{D})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.

  Dans l'espace, une droite $(\mathscr{D})$ ou un plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{(0, y, y, t) \,/\, (y\,;t) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $\mathrm{F} = \{(x\,;y)\,z \,/\, x+y+z=0\}$ est un sev mais l'ensemble $\mathrm{G} = \{(x\,;y)\,z \,/\, x+y+z=1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

  Les ensembles $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathscr{C}^k(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

  Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est un sev du $\mathbb{K}$ev vectoriel $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

  On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}] \sqsubset \mathbb{K}_1[\mathrm{X}] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \sqsubset \mathbb{K}_{n+1}[\mathrm{X}] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}[\mathrm{X}].$$

Remarque : La relation « être un sev » est transitive.

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathscr{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,
- $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques,

sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 7 (Dans l'espace des suites) : Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$ev des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.
- L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

  Plus précisément,
  - $\left\{y \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \,/\, y' + a(x)y = 0\right\}$ est un sev de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.
  - $\left\{y \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \,/\, y'' + ay' + by = 0\right\}$ est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du $\mathbb{K}$ev des suites réelles ou complexes.

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (I.2) .

Exercice 3 : Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $\mathrm{F}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geqslant 0\}$
- $\mathrm{F}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$
- $\mathrm{F}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}$
- $\mathrm{F}_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$

II.1 Sous-espace engendré par une partie finie

Définition 4 : Soit $(\mathrm{E}\,; +\,; \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et X une partie de E.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par X, noté $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X})$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X.

On convient que $\mathrm{vect}\,(\varnothing) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Exemple 9 : Dans le plan, si $\mathrm{X} = \{\vec{u}\}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors ce s.e.v est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$:

$$(\mathscr{D}) = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) : Soit $(\mathrm{E}\,; +\,; \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'intersection $\bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples 10 :

- $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
- $\left\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, \forall\, k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0\right\}$ est un sev de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ATTENTION

La réunion de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel !!!

Par exemple, dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, si F est l'axe des abscisses et G l'axe des ordonnées, $(1\,; 0)$ et $(0\,; 1)$ sont dans $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ mais pas $(1\,; 1) = (1\,; 0) + (0\,; 1)$.

Exercice 4 : Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E un espace vectoriel.

Montrer que :

$$\mathrm{F} \cup \mathrm{G} \text{ est un sous-espace vectoriel de E} \iff (\mathrm{F} \subset \mathrm{G}) \text{ ou } (\mathrm{G} \subset \mathrm{F}).$$

Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) : Soit X une partie de E.

On note $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X})$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X.

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\mathrm{vect}\,(\mathrm{X}) = \bigcap_{\substack{\mathrm{F}\ \text{sev} \\ \mathrm{X}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F}.$$

Proposition 9 : Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

1. F est un sev de E si, et seulement si $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(\mathrm{F})$.
2. Pour toutes parties X et Y de E, $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y} \implies \mathrm{vect}\,(\mathrm{X}) \subset \mathrm{vect}\,(\mathrm{Y})$.

Exercice 5 : Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$.
Montrer que $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$.

Théorème 10 : Soient $(\mathrm{E}\,;+)\cdot$ un $\mathbb{K}$-ev X une partie non vide de E.

vect (X) est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de X.

Exemple 11 (IMPORTANT) : Si $\mathrm{X} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est finie, on note $\mathrm{vect}\,(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ ou plus simplement $\mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

On a alors légalité :

$$\mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) = \Big\{\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \dots + \lambda_n.e_n \,/\, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\Big\}.$$

En particulier et à retenir,

$$\boxed{x \in \mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) \iff \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i.}$$

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,
  - $\mathrm{vect}\,(1) = \mathbb{R}$,
  - $\mathrm{vect}\,(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, $\mathrm{vect}\,(1) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{i}) = \mathbb{C}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\mathrm{vect}\,(\vec{u}\,;\vec{v})$ est un plan vectoriel.
- Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}\,(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.
- Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles satisfaisant

  $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

  est un sev.

  Mieux, en notant $r_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on sait que :

  $$\mathcal{S} = \mathrm{vect}\,\left((r_+^n)_{n\in\mathbb{N}}\,;(r_-^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

II.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 6 : Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.
Si F et G sont deux sev de E, on appelle *somme* de F et G, notée $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ l'ensemble

$$\mathrm{F}+\mathrm{G}=\{x+y\ /\ (x\,;y)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G}\}\,.$$

En particulier, écrire $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$ signifie que tout vecteur de E peut se décomposer comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\boxed{\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}\iff\forall\,x\in\mathrm{E},\ \exists\,(x_{\mathrm{F}},x_{\mathrm{G}})\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\ x=x_{\mathrm{F}}+x_{\mathrm{G}}.}$$

ATTENTION Il n'y a pas toujours unicité dans cette écriture. Si oui, on parlera alors de *somme directe*.

Proposition 11 : Pour tous sous-espaces F et G de E, $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est un sev de E.

Exemple 13 : Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u},\vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathscr{D})=\mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathscr{D}')=\mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathscr{D})+(\mathscr{D}')=(\mathscr{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathscr{D})+(\mathscr{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dit autrement, le sev engendré par la réunion de deux droites vectorielles non parallèles est un plan vectoriel.

Remarque : $\mathrm{F}+\mathrm{F}=\mathrm{F}$!

Théorème 12 : Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.

$$\mathrm{vect}\,(\mathrm{F}\cup\mathrm{G})=\mathrm{F}+\mathrm{G}.$$

Remarque : $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est donc le plus petit sev de E au sens de l'inclusion contenant $\mathrm{F}\cup\mathrm{G}$.
En particulier,

$$\mathrm{vect}\,(u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_n)+\mathrm{vect}\,(v_1,\,v_2,\,\ldots,\,v_m)=\mathrm{vect}\,(u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_n,\,v_1,\,v_2,\,\ldots,\,v_m)\,.$$

II.3 Somme directe

Définition 7 : Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.
On dit que F et G sont en *somme directe*, notée $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$, lorsque tout élément de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose *de manière unique* en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall\,z\in\mathrm{F}\oplus\mathrm{G},\ \exists\,!\,(x\,;y)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad z=x+y.$$

Proposition 13 : Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall\ (x\,;x') \in \mathrm{F}^2,\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{G}^2,\ x+y = x'+y' \implies x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$.
3. $\forall\, x \in \mathrm{F},\ \forall\, y \in \mathrm{G},\ x+y = 0_{\mathrm{E}} \implies x = y = 0_{\mathrm{E}}$.
4. $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$

ATTENTION $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et non $\varnothing$!!!!!!

Exercice 6 : Montrer que les sev F et G sont en somme directe avec :

1. $\mathrm{F} = \mathbb{K}\vec{u}$ et $\mathrm{G} = \mathbb{K}\vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

   Dans ce cas, $\mathbb{K}\vec{u} + \mathbb{K}\vec{v} = \mathbb{K}\vec{u} \oplus \mathbb{K}\vec{v} = \mathrm{vect}\ (u\,;v)$.
2. $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(1, \mathrm{X})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(1, \mathrm{X}^2)$.

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

Définition 8 : On dit que la somme de n sous-espaces vectoriels F_1, F_2, ..., F_n d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + ... + \mathrm{F}_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de F_1, F_2, ..., F_n.

$$\forall\, x \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + ... + \mathrm{F}_n,\ \exists\,!\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times ... \times \mathrm{F}_n,\ x = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

La somme directe de $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \dots, \mathrm{F}_n$ est notée : $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus ... \oplus \mathrm{F}_n$

Théorème 14 : Il y a équivalence entre :

1. La somme de n sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \dots, \mathrm{F}_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe.
2. $\forall\, p \in \mathbb{N}, 2 \leqslant p \leqslant n,\ \left(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + ... + \mathrm{F}_{p-1}\right) \cap \mathrm{F}_p = \{0\}$.

Remarque : Si $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + ... + \mathrm{F}_n$ est une somme directe alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p \leqslant n, \forall\, q \in \mathbb{N}, 1 \leqslant q \leqslant n, p \neq q :\ \mathrm{F}_p \cap \mathrm{F}_q = \{0\}.$$

Mais cette condition (qui est nécessaire) pour que la somme soit directe n'est pas suffisante.

Contre-Exemple 14 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soient $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,((1,0))$, $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,((0,1))$ et $\mathrm{H} = \mathrm{vect}\,((1,1))$.

Il est immédiat que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}, \mathrm{G} \cap \mathrm{H} = \{0\}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{H} = \{0\}$, et pourtant la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G} + \mathrm{H}$ n'est pas directe.

En effet l'élément $(1,1)$ de $\mathrm{F}+\mathrm{G}+\mathrm{H}$ se décompose en somme d'éléments de F, G et H de la manière suivante :

$$(1,1) = (0,0) + (0,0) + (1,1)$$

mais aussi de la manière suivante :

$$(1,1) = (1,0) + (0,1) + (0,0).$$

Il n'y a donc pas unicité de l'écriture.

En conclusion,

ATTENTION Dans le cas de plusieurs sous-espaces vectoriels, le fait que les sous-espaces aient deux à deux une intersection réduite au vecteur nul n'est pas une condition suffisante pour que la somme soit directe.

II.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 9 : Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.
On dit que F et G sont *supplémentaires* (dans E) si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

En particulier, $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \forall\, z \in \mathrm{E},\ \exists!\,(x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad z = x + y.}$

ATTENTION Ne confondez pas « en somme directe » et « supplémentaires dans E ».

Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E a AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour être précis, les vecteurs de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ ont alors exactement une décomposition de cette forme tandis que les éléments de $\mathrm{E} \backslash (\mathrm{F} + \mathrm{G})$ n'en ont pas.

Dire que F et G sont supplémentaires dans E, c'est affirmer en plus que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$, c'est donc affirmer que tout vecteur de E possède EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Proposition 15 (Caractérisation de la somme directe) :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \begin{cases} \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}. \end{cases}$$

Exemple 16 : Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1\,;0)$ et $e_2\,(-1\,;1)$.

Montrons que $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,(e_1) \oplus \mathrm{vect}\,(e_2)$.
Soit $(x\,;y) \in \mathrm{E}$. Cherchons $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x\,;y) = a.e_1 + b.e_2$.
Or,

$$(x\,;y) = a.e_1 + b.e_2 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = a - b \\ y = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = x + y \\ b = y \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution, donc la somme est directe *i.e.* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}\,(e_1) \oplus \mathrm{vect}\,(e_2)$.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

— $\mathrm{F} = \{(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
— $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,((1\,;1\,;1))$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. On pose également $\mathrm{H} = \mathrm{vect}\,((1\,;0\,;0))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

ATTENTION Comme on le voit dans l'exercice précédent, un sous-espace vectoriel a, en général, plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'un supplémentaire et non du supplémentaire.

Méthode I (Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ par analyse-synthèse) :
Il s'agit, pour un vecteur quelconque x de E, de trouver $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$ uniques tels que $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$.
Le raisonnement par analyse-synthèse est adapté car on ne sait généralement pas quelle forme a la décomposition : on va le découvrir dans l'analyse.

Déclaration d'un vecteur à décomposer : *On fixe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ sans conditions particulières.*

Analyse : *On suppose que x s'écrit sous la forme $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$, où x_F est un vecteur de F et x_G un vecteur de G.*
On essaye ensuite de construire x_F et x_G uniquement à l'aide de x ou d'autres vecteurs de référence.
On doit trouver un unique couple candidat $(x_\mathrm{F}, x_\mathrm{G})$. L'unicité de la décomposition est alors acquise. (Sinon la somme n'est pas directe.)

Synthèse : *On considère le couple $(x_\mathrm{F}, x_\mathrm{G})$ exhibé dans l'analyse et on montre qu'il satisfait les qualités requises i.e. $x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G} = x$, $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$.*

III Applications linéaires

Qu'est ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?

III.1 Généralités

Définition 10 : Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un *homomorphisme d'espaces vectoriels* ou, plus simplement, une *application linéaire* si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y)$.
- $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \quad f(\lambda._{\mathrm{E}} x) = \lambda._{\mathrm{F}} f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Vocabulaire :

- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une *forme* linéaire.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$ ou, simplement, E^* [1].
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un *isomorphisme*.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{I}som_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathscr{I}som(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$ est linéaire, on dit que f est un *endomorphisme*.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un *automorphisme*.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{G}l_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

ATTENTION

L'application $\ln : (\mathbb{R}_+^*\,;\times) \longmapsto (\mathbb{R}\,;+)$ est également appelé un *morphisme* mais non un homomorphisme car $(\mathbb{R}_+^*\,;\times)$ n'est pas un espace vectoriel.

De même, les homéomorphismes et autres difféomorphismes rencontrés en analyse n'ont, en général, rien à voir avec des morphismes. Juste un choix de nom malheureux.

Pour toute application linéaire f :

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.f(e_i)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}.}$$

Exemples 17 :

- $\forall\, k \in \mathbb{R},\ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.

  C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.
- Les translations $t_a : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_{\mathrm{E}}$.

[1]. On l'appelle le *dual* de E.

- Les applications $x \longmapsto x^2$, $\dfrac{1}{x}$, $\cos(x)$, $\sqrt{x}$, e^x, ... ne sont pas linéaires !!!!!
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+2y, -x, 3y) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x-3, 4+y, -x+2y) \end{array}$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On pourra notamment constater que $f(2x\,;2y) \neq 2f(x\,;y)$.

Proposition 16 : Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$.

1. $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \implies f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.
2. $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \iff \forall\,(x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2,$
$$f(\lambda \cdot_{\mathrm{E}} x + \mu \cdot_{\mathrm{E}} y) = \lambda \cdot_{\mathrm{F}} f(x) + \mu \cdot_{\mathrm{F}} f(y)$$
$$\iff \forall\,(x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot_{\mathrm{E}} x + y) = \lambda \cdot_{\mathrm{F}} f(x) + f(y).$$
3. La restriction d'une application linéaire à un sev reste linéaire :
$$\forall\,\mathrm{A} \text{ sev de } \mathrm{E} \text{ et } f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}), \quad f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{L}(\mathrm{A}\,;\mathrm{F}).$$

ATTENTION

Si f est linéaire alors $f(0) = 0$, mais la réciproque est fausse.

En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0) = 0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.

Méthode 2 (Montrer qu'une application n'est pas linéaire) :
Il suffit par exemple, au choix,

1. *de vérifier que* $f(0_{\mathrm{E}}) \neq 0_{\mathrm{F}}$,
2. *d'exhiber un couple particulier de vecteurs* (x, y) *et un couple particulier de scalaires* (λ, μ) *pour lesquels* $f(\lambda x + \mu y) \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$.
3. *de montrer que* $f(-x) \neq -f(x)$ *pour un vecteur* $x \in \mathrm{E}$ *particulier.*

Exemples 18 : Les applications ci-dessous ne sont pas linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ est un endomorphisme de E, appelé *homothétie de* E *de rapport* λ. En particulier, Id_{E} est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}$ est un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$: $\delta: \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

Ce n'est pas un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{K})$: $\delta: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est un endomorphisme.

L'intégrale sur $[a\,;b]$: $\mathscr{I}: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a\,;b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

L'évaluation en a : si A est un ensemble non vide, alors pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$e_a: \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array} \quad \text{est une forme linéaire.}$$

Idem pour l'évaluation des polynômes en un $a \in \mathbb{K}$ donné

$$e_a: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a). \end{array}$$

La transposition matricielle : $\tau: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array}$ est linéaire.

La trace : $\mathrm{T}: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(\mathrm{M}) \end{array}$ est une forme linéaire.

Partie réelle, imaginaire, conjugaison : sont $\mathbb{R}$-linéaires mais pas $\mathbb{C}$-linéaires.

$$\mathfrak{R}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Re}\,(z) \end{array} \qquad \mathfrak{I}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Im}\,(z) \end{array} \qquad c: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$

L'application limite :

$$\Lambda: \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{suites convergentes} \\ \text{de } \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array} \quad \text{est une forme linéaire.}$$

L'application canonique associée à une matrice : si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$f_{\mathrm{A}}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

La projection : Soient E_1, E_2, ..., E_n des $\mathbb{K}$-ev.

$$p_i: \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathrm{E}_i \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ dans E_i appelée *projection* sur E_i (parallèlement aux E_j, $j \neq i$).

Exercice 8 :

1 Donner l'application canoniquement associée à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 À quelle matrice est associée $\varphi : (x,y) \longmapsto (x+2y, 3x+4y, 5x+6y)$?

III.2 Le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$

Proposition 17 :

$(\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev, sev de $(\mathscr{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}), +, \cdot)$.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que si, pour tout x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

III.3 Composition d'applications linéaires

Proposition 18 :

1. La composée d'applications linéaires est une application linéaire.

   En particulier, si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$.
2. La composée est elle-même bilinéaire :

   En effet, si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors :
   - $h \longmapsto g \circ h$ est linéaire de $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à droite)**.
   - $h \longmapsto h \circ f$ est linéaire de $\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à gauche)**.

Remarque : $h \longmapsto g \circ h \in \mathscr{L}\Big(\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,;\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})\Big)$.

III.4 Polynômes d'endomorphismes

Dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_{E} et satisfait à la loi externe : $\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g$.

On dit alors que $(\mathscr{L}(\mathrm{E}), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non intègre et non commutative. Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \ldots + +a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on peut aussi définir le *polynôme d'endomorphisme* $\mathrm{P}(f) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = a_0 f^0 + a_1 f^1 + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n \quad \text{où } f^0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}},\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ \ldots$$

Exemples 20 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- Si $\mathrm{P} = \lambda \in \mathbb{K}$ alors $\mathrm{P}(f) = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
- Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 6 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+3)$ alors $\mathrm{P}(f) = f^2 + f - 6\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = (f - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ (f + 3\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Exemples 21 :
- Si $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
- Si $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$ et $u^2 = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Proposition 19 : Soient $(f\,;g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ deux endomorphismes qui **commutent** *i.e.* $f \circ g = g \circ f$.

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

ATTENTION Les écritures $f^k g^{n-k}$ et $(f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$ sont respectivement à comprendre $f^k \circ g^{n-k}$ et $(f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}\right)$.

Remarque : Les homothéties $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Exemples 22 : Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on a :

$$(f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$f^n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = (f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f + f^2 + \cdots + f^{(n-1)}\right).$$

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Montrer que $\mathrm{E} = \ker\,(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker\,(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

IV NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

IV.1 Images directe et réciproque d'un sev

Proposition 20 : Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. Pour tout sev E_1 de E, l'ensemble $f(\mathrm{E}_1)$ est un sev de F.
2. Pour tout sev F_1 de F, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{F}_1)$ est un sev de E.

ATTENTION La notation f^{-1} est à prendre comme l'image réciproque par f ici.

IV.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 11 : Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. On appelle *noyau* de f, et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E s'envoyant sur le vecteur nul de F.

$$\ker f = f^{-1}(\{0_{\mathrm{F}}\}) = \{x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = 0_{\mathrm{F}}\} \subset \mathrm{E}.$$

2. On appelle *image* de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E.

$$\mathrm{Im}\, f = f(\mathrm{E}) = \{y \in \mathrm{F}, \quad \exists x \in \mathrm{E}, y = f(x)\} \subset \mathrm{F}.$$

Contre-Exemple 23 : Considérons l'endomorphisme $v : (x, y, z) \longmapsto (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z)$.
$v(1\,;-1\,;1) = (0\,;0\,;0)$ *i.e.* $(1\,;-1\,;1) \in \ker v$ sans qu'il soit nul.
Les éléments du noyau d'une application linéaire ne sont pas tous nuls. C'est là le point intéressant.

À retenir 1 :

- $\mathrm{Im}(u) = \{0_{\mathrm{F}}\} \iff u = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \iff \ker(u) = \mathrm{E}.$
- Si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Alors,

$$v \circ u = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})} \iff \mathrm{Im}(u) \subset \ker(v).$$

Exemples 24 (Images) :

- Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 2x) \end{array}$ alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}((1, 2))$ est représenté par la droite d'équation $y = 2x$ dans le plan.
- L'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z)$ est le plan d'équation $z = x$.

Exemples 25 (Noyaux) :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est l'application linéaire de dérivation, alors $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I.
- Si $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a) \end{array}$, alors $\ker(f_a) = \{(\mathrm{X} - a)\mathrm{Q} \,/\, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$.

Exemple 26 (Projection) : Soit l'application linéaire définie par

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0). \end{array}$$

Noyau : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \ker p \iff p((x,y)) = (0,0)$
$\iff (x,0) = (0,0)$
$\iff x = 0.$

Donc, $\ker(p) = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des ordonnées.

Image : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \operatorname{Im} p \iff \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, p((x_0,y_0)) = (x,y)$
$\iff \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, (x_0,0) = (x,y)$
$\iff y = 0.$

Donc, $\operatorname{Im}(p) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des abscisses.

Proposition 21 : Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. $\ker f$ est un sev de E.
2. $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.

Exercice 11 : Déterminer le noyau de $\Phi: \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' + 4f. \end{array}$

IV.3 Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème 22 : Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. f est injective $\iff \ker f = \{0_\mathrm{E}\}$.
2. f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Réponse : *Un Kinder injectif car son noyaux est réduit à zéro.*

Exemple 27 (Symétrie) : Soit l'application linéaire définie par

$$\mathrm{S}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

Noyau : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \ker \mathrm{S} \iff p((x,y)) = (0,0).$
$\iff (-x,y) = (0,0)$
$\iff (x,y) = (0,0)$

Donc, $\ker(\mathrm{S}) = \{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = \mathrm{S}((-x,y))$ *i.e.* $\operatorname{Im}(\mathrm{S}) = \mathbb{R}^2$.

L'application S est donc surjective.

Conclusion : $\mathrm{S} \in \mathscr{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exemples 28 :

- Toute homothétie non nulle est surjective.
- $D: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ n'est pas surjective.
- $T: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([-1\,;1]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ n'est pas injective.