Espaces vectoriels

I Espaces vectoriels

Exercice 1 : Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $\lambda(a,b)=(a,\lambda b)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
2. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $\lambda(a,b)=(\lambda^2 a,\lambda^2 b)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
3. $(a,b)+(c,d)=(c,d)$; $\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. On définit sur E :

- la loi $\oplus$ par $(x,y)\oplus(x',y')=(xx',y+y')$
- une loi externe $\cdot$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ par $\lambda(x,y)=(x^\lambda,\lambda y)$.

Vérifier que $(\mathrm{E},\oplus,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$ev.

Exercice 3 : $\mathbb{R}^2$, muni de la loi + usuelle et de la loi externe définie par $\lambda(x,y)=(\lambda x,0)$ est-il un $\mathbb{R}$ev ?

Exercice 4 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid f(1)=0\}$.
2. $\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid f(0)=1\}$.
3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+\alpha y+1\geqslant 0\}$.
4. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y=0\}$.
5. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/xy=0\}$.
6. $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x=0,y=z\}$.
7. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=1\}$.
8. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+xy\geqslant 0\}$
9. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 \sin(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0$.
10. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
11. L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.
12. $\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\exists(\mathrm{A},\varphi)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\mathrm{A}\cos(x-\varphi)\}$.
13. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles.
14. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
15. L'ensemble des solutions (x_1,x_2,x_3) du système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1-x_2+x_3 &=& 0\\ x_1-4x_2+7x_3 &=& 0\\ x_1+3x_2-6x_3 &=& 0.\end{array}\right.$$
16. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2)=0$.
17. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x\oplus y=xy$ et $\lambda\cdot x=x^\lambda$, $(\lambda\in\mathbb{R})$.
18. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
19. L'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ continues, vérifiant $f(a)=7f(b)+\displaystyle\int_a^b t^3f(t)\,\mathrm{d}t$.
20. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
21. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4.
22. L'ensemble des polynômes de degré exactement n.
23. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f''+\omega^2f=0$.
24. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.
25. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.
26. L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x+y)=0$.
27. L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.
28. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+3z=0\}$.
29. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
30. L'ensemble des fonctions monotones
31. L'ensemble des fonctions f telles que : $\exists x\in\mathbb{R},f(x)=0$
32. L'ensemble des fonctions nulles sur [0,1]
33. L'ensemble des fonctions périodiques de période T (T fixé).
34. L'ensemble des fonctions ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

Exercice 5 : On note :

— $\mathrm{F} = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=0\}$.
— $\mathrm{G} = \{(a-b\,;a+b\,;a-3b) \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

II SOMME DIRECTE

Exercice 6 : Soient C l'ensemble des suites réelles convergentes, C_0 l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0, et D l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que C, C_0 et D sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0 \oplus \mathrm{D}$.

Exercice 7 : On note :

— $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x-2y=0\}$.
— $\mathrm{G} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+2z+3t=0\}$.

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 8 : Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$.

On note :

— $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
— $\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E, et H un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans G.

Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$. On pose $e = (1,1,\cdots,1) \in \mathbb{C}^n$, et $\mathrm{F} = \mathbb{C}e$.

On définit $\mathrm{G} = \left\{ (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,/\, \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \right\}$.

Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$.

Correction : *Montrons que* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$, *i.e.*

- F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^n$;
- G *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^n$;
- $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$;
- $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$.

Pour $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$

- F *et* G *sont clairement des sev des* $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathbb{C}^n$: *immédiat*
- $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$: *tout* x *de* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *s'écrit* $(\lambda, \lambda, \cdots, \lambda)$ *avec* $n\lambda = 0 \iff \lambda = 0$. *Donc* $x = 0$.
- $\mathbb{C}^n \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$: *Soit* $u = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{C}^n$.

analyse Supposons qu'il existe $x \in \mathrm{F}$ et $y \in \mathrm{G}$ tels que $u = x + y$.

On a :

- $x \in \mathrm{F}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda e = (\lambda, \lambda, \cdots, \lambda)$.
- $y \in \mathrm{G}$ donc $y = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$

$u = x + y$ donc $\begin{cases} \lambda + z_1 = a_1 \\ \lambda + z_2 = a_2 \\ \vdots \\ \lambda + z_n = a_n \end{cases}$. D'où $\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \\ \forall\, k \in [\![1, n]\!], z_k = a_k - \lambda \end{cases}$.

On a $x = \lambda e$ avec $\lambda = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $y = (a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \cdots, a_n - \lambda)$.

Soit $u = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{C}^n$.

synthèse On pose : $\begin{cases} x = \lambda e \text{ avec } \lambda = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \\ y = (a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \cdots, a_n - \lambda) \end{cases}$

On a bien :

- $x \in \mathrm{F}$.
- $y \in \mathrm{G}$.

  En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - \lambda) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n\lambda = 0.$
- $u = x + y$: En effet, $x + y = (\lambda, \lambda, \cdots, \lambda) + (a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \cdots, a_n - \lambda)$
  $= (a_1, a_2, \cdots a_n) = u.$

Conclusion : $u \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$ donc $\mathbb{C}^n \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ puis $\mathbb{C}^n \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 11 : Soit $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)^2 | \mathrm{P}\}$.

1. Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$.

   Aide : On écrira G sous la forme $\mathrm{vect}\,(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ avec P_1, P_2 et P_3 trois polynômes de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$ à déterminer.
2. Montrer que $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}] = \mathrm{G} \oplus \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Exercice 12 : On note :

- $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \,/\, f(0) = f'(0) = 0\}$.
- $\mathrm{G} = \{x \longmapsto ax + b \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.

Exercice 13 : Soit $\mathrm{E} = \mathrm{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note :

- $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, f'' - 2f' + 5f = 0\}$.
- $\mathrm{H} = \{f \in \mathrm{E}, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Vérifier que G et H sont des sev de E.
2. Sans calcul, justifier que G et H sont en somme directe (dans E).
3. Prouver que G et H sont des sev supplémentaires de E.

Exercice 14 : Dans $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère :

- F le sous-ensemble de E composé des matrices de trace nulle.
- $\mathrm{G} = \{\lambda \mathrm{I}_n \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ celui des matrices scalaires.

Montrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, et que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 15 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1. Justifier que $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,/\, \mathrm{P}(\alpha) = 0\}$ est un sev. de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

III Applications linéaires

Exercice 16 : En admettant que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau et leur image.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP} \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-z, y+z) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, -2x+2y) \end{array}$
4. $j : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} - \mathrm{M}^\top \end{array}$
5. $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

Exercice 17 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$).

Démontrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 18 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$). Démontrer que $\ker\ f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 19 : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Montrer que pour tout entier k, on a $\ker\ u^k \subset \ker\ u^{k+1}$ et $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$.

Exercice 20 (Image, noyau) : Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

1. Montrer que :

   a. $\ker(v \circ u) = u^{-1}(\ker v)$.
   b. $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.
   c. $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u)$.
   d. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

2. En déduire que si u est un endomorphisme de E, alors

$$\ker(u) \subset \ker\ (u^2) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}\ (u^2) \subset \operatorname{Im} u.$$

3. Prouver que $\ker(u) = \ker\ (u^2) \iff \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_\mathrm{E}\}$.

Exercice 21 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f(\ker(f^2))$.

Correction : Pour montrer l'égalité $\ker f \cap \operatorname{Im} f = f(\ker f^2)$, nous montrons la double inclusion.

Soit $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, alors $f(y) = 0$ et il existe x tel que $y = f(x)$.

De plus $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$ donc $x \in \ker f^2$.

Comme $y = f(x)$ alors $y \in f(\ker f^2)$. Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker f^2)$.

Pour l'autre inclusion, nous avons déjà que $f(\ker f^2) \subset f(\mathrm{E}) = \operatorname{Im} f$. De plus $f(\ker f^2) \subset \ker f$, car si $y \in f(\ker f^2)$ il existe $x \in \ker f^2$ tel que $y = f(x)$, et $f^2(x) = 0$ implique $f(y) = 0$ donc $y \in \ker f$.

Par conséquent $f(\ker f^2) \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 22 : Préciser si $\mathscr{L}$ est injective.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;2x-y) \end{array}$

2. $\mathscr{L}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y+z) \end{array}$

3. $\mathscr{L}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+y-z, x-y+z, -x+y+z) \end{array}$

4. $\mathscr{L}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y+3z+4t, -x-y+z) \end{array}$

Exercice 23 : Déterminer les noyaux, images, et déduire éventuellement l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

1. $\mathrm{D}: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$

2. $\mathrm{P}: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$, $a \in \mathrm{I}$.

Exercice 24 : Montrer que l'application suivante est un automorphisme et expliciter son automorphisme réciproque

$$v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+4z, x+y-z, 2y+z). \end{array}$$

Exercice 25 : Soit E les $\mathbb{R}$ev des applications f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D}: \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$

1. Vérifier que $\mathrm{D} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer $\ker(\mathrm{D})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{D})$.
3. A-t-on $\mathrm{E} = \ker(\mathrm{D}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{D})$?

Exercice 26 :

1. Montrer que pour tous polynômes P, Q, tout endomorphisme u et tout scalaire λ :
   a. $(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(u) = \lambda\mathrm{P}(u) + \mathrm{Q}(u)$
   b. $(\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q})(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u)$
   c. Deux polynômes en le même endomorphisme u commutent.
2. Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

   On dit que P est annulateur de u si $\mathrm{P}(u)$ est l'endomorphisme nul :
   $$\mathrm{P}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$
   Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, et que si $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est annulateur de u, alors tout multiple de P l'est également.