Mathématiques 5

Vendredi 20 septembre 2024

Durée : **4** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **4** exercices indépendants.

Problème 1 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\mathrm{P}_n : x \longmapsto x^5 + nx - 1$.

1 Étudier les variations de P_n sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites.

2
- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique réel α_n tel que $\mathrm{P}_n(\alpha_n) = 0$.

  Que vaut α_0 ?
- b) Donner le signe de P_n sur $\mathbb{R}$.

3
- a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$.
- b) Soit $x \in [0\,;1]$. Déterminer le signe de $\mathrm{P}_{n+1}(x) - \mathrm{P}_n(x)$.
- c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

  Indication : on s'aidera de la question **2** b).
- d) Conclure que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\alpha \in [0\,;1]$.

4
- a) Déterminer le signe de $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) En déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
- c) Conclure sur la valeur de la limite α.

5 Démontrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, puis que $\dfrac{1}{n} - \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^6}$.

Problème 2 : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2\text{sh}\,(x) - x.$$

Partie I

1. Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f^{-1} est impaire.

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de f en 0.

4. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre en 0 et déterminer le développement limité à l'ordre 4 de f^{-1} en 0.

5. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\left(f^{-1}\right)'$ en 0.

Partie II

On pose $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{f^{-1}(x)}{x}$.

6. Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0.
   On appellera encore g la fonction ainsi prolongée.
   Donner $g(0)$.

7. Prouver que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner $g'(0)$.

8. Montrer que $g'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{2}{3}x$.

9. Prouver alors qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que g est décroissante sur $[0\,;\alpha[$.

Partie III

10. Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution réelle $u_n = g\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

11. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang et donner sa limite.

12. Donner l'équivalent le plus simple de $u_n - 1$ à l'infini.

Problème 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(0) = 0 \quad (\mathrm{E}_n)\,. \tag{E_n}$$

On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = 0. \tag{E}$$

1 Déterminer avec soin si le polynôme $\mathrm{P} = 1$ est une solution d'une des équations (E) ou (E_n), $n \in \mathbb{N}$. Même question pour les polynômes $\dfrac{\mathrm{X}}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{X}^2}{2}$.

2 (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 1$.

Justifier à l'aide d'un théorème du cours qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{P}(\alpha) = 0$.

(b) Montrer alors proprement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha + 2k$ est aussi une racine de P.

(c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est celui des polynômes constants.

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (E_n) admet au plus une solution.

4 Soit P une solution de (E_n).

(a) Déterminer une équation vérifiée par $\mathrm{P}^{(n+1)}$.

(b) En déduire que $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n+1$.

5 Résoudre (E_1).

Problème 4 :

Partie 0 : Questions liminaires

Les résultats de cette partie pourront être admis et utilisés par la suite.

On considère un réel M positif fixé, une suite de réels $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $\lambda \in \,]0\,;1[$ tels que :

$$|v_n| \leqslant \mathrm{M}\,\lambda^n \quad \text{à partir d'un certain rang N.}$$

1 Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k|\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ converge.

Indication : On pourra s'intéresser à la monotonie de la suite puis reconnaître une certaine somme géométrique.

2 En déduire que si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\lambda^n\right)$ alors il existe un entier N tel que $\left(\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k|\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ converge.

On admettra que si $\left(\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k|\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ converge alors il en est de même de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$.

Partie I

3 On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}$ tout entier, encore notée f.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe un réel $c \in]0\,;x[$ pour lequel $f'(x) = -\dfrac{\sin(c)}{2}$.

Indication : On pourra appliquer un certain théorème à la fonction

$$t \longmapsto (x\cos(x) - \sin(x))t^2 - x^2(t\cos(t) - \sin(t)).$$

(c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(d) Montrer que f admet au plus un point fixe dans $\mathbb{R}$.

On admettra dans la suite que f admet effectivement un point fixe unique ℓ et que $\ell \in]0\,;1[$.

(e) Montrer que $f'(\ell) \neq 0$.

On note à présent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

(g) En déduire un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de ℓ à 10^{-3} près.

Partie II

*On a obtenu une majoration fine de l'écart $u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en **3** (f), mais ce n'est qu'une majoration et on préférerait connaître un équivalent simple de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour connaître précisément la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.*
La suite du problème est consacrée à cette étude dans un cadre général.

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. On suppose que :

- f possède un point fixe ℓ intérieur à I,
- ℓ est attractif *i.e.* $|f'(\ell)| < 1$,
- $f'(\ell) \neq 0$.

4 Montrer l'existence de deux réels $r > 0$ et $\eta \in]0\,;1[$ pour lesquels : $]\ell - r\,;\ell + r[\subset \mathrm{I}$, $]\ell - r\,;\ell + r[$ est stable par f et f est η-lipschitzienne sur $]\ell - r\,;\ell + r[$.

On se donne à présent une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0 \in]\ell - r\,;\ell + r[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire.

Ainsi $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on peut poser $a_n = \dfrac{u_{n+1} - \ell}{f'(\ell)\,(u_n - \ell)}$.

5 (a) Montrer que $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\eta^n\right)$.

(b) Montrer, en exploitant la formule de Taylor-Young, que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{O}\left(\eta^n\right)$.

(c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang N.

(d) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \ln(a_k)\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ converge

(e) En déduire l'existence d'un réel $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour lequel :

$$u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha f'(\ell)^n.$$