

Suites et dénombrements

Exercice 1 : Coco, le perroquet du capitaine Haddock, ne possède que neuf mots dans son vocabulaire. Trois mots de la vie courante : « allô », « dring », « caramba » ; mais aussi six expressions inspirées du capitaine : « mille-sabords », « tonnerre », « ectoplasme », « moule-à-gaufre », « bachi-bouzouk », « malotru ».

On suppose que chaque phrase prononcée par le perroquet contient exactement six mots (possiblement répétés).

- 1 Combien de phrases Coco peut-il prononcer ?
- 2
 - a Combien de phrases contiennent exactement six mots différents ?
 - b Combien de phrases contiennent exactement cinq mots différents ?
 - c En déduire le nombre de phrases contenant au moins cinq mots différents.
- 3 On suppose dans cette question que Coco n'utilise qu'une seule expression du capitaine, « malotru », et que tous les autres mots proviennent de la vie courante.
 - a On fixe $p \in \llbracket 0; 6 \rrbracket$. Combien de phrases Coco peut-il faire dans cette situation, en plaçant exactement p fois le mot « malotru » ?
 - b En utilisant une approche combinatoire, justifier la formule $4^6 = \sum_{p=0}^6 \binom{6}{p} 3^{6-p}$.
On ne fera aucun calcul.

Exercice 2 :

- 1 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel $x_n \in [0; +\infty[$ tel que $e^{x_n} - x_n = n$.
- 2
 - a Montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \geq \ln(n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
 - b Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\ln\left(1 - \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) = \ln(n) - x_n$.
En déduire $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- 3 On pose $v_n = x_n - \ln(n)$.
 - a Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\forall n \geq 1$, $e^{v_n} - 1 = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{v_n}{n}$.
 - b En déduire un équivalent simple de v_n puis montrer que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$