Mathématiques

Problème I :

Commentaires : *P_n n'est pas un polynôme mais une fonction polynomiale.*

1 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n = (x^5 - 1) + nx$, dont les puissances sont impaires est une somme de fonctions strictement croissantes donc strictement croissante.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{P}_n(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^5\left(1 + \frac{n}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right) = \pm\infty$ d'après les théorèmes sur les sommes et produits de limites.

2 (a) D'après la question précédente, la fonction P_n est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle y établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Il existe donc un unique réel α_n tel que $\mathrm{P}_n(\alpha_n) = 0$.

Comme $\mathrm{P}_0(1) = 0$, on en déduit que $\alpha_0 = 1$, unique racine de P_0.

Commentaires : *Le théorème de Bolzano ne donne pas l'unicité du zéro. Seulement son existence.*

De toute manière, me justifier l'existence de α_n en commençant par me dire qu'il existe a et b tels que $\mathrm{P}(a) < 0$ et $\mathrm{P}(b) > 0$ est un peu bizarre. Autant me dire directement que $\mathrm{P}(\alpha_n) = 0$.

On pouvait le faire ainsi mais alors il fallait utiliser la caractérisation des limites infinies pour justifier qu'il existait un b tel que $x > b \implies \mathrm{P}(x) > \mathrm{A}$ pour n'importe quel A et prendre $\mathrm{A} = 1$ par exemple. Pareil pour a et la limite $-\infty$.

(b) D'après la question précédente et la stricte monotonie de P_n, on en déduit son signe sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$\mathrm{P}_n(x)$		$-$	0	$+$	
P_n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\mathrm{P}_n(x) \geqslant 0 \iff x \in [\alpha_n\,;+\infty[\,.$$

Commentaires : *Sans stricte monotonie, point de points.*

3 (a) Il est facile de calculer $\mathrm{P}_n(0) = -1 < 0$ et $\mathrm{P}_n(1) = n \geqslant 0$.

D'où, $\mathrm{P}_n(0) \leqslant \mathrm{P}_n(\alpha_n) \leqslant \mathrm{P}_n(1)$, ce qui équivaut (par **stricte** croissance de P_n sur $[0\,;1]$) à
$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1. \tag{XX.1}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_{n+1}(x) - \mathrm{P}_n(x) = x^5 + (n+1)x - 1 - (x^5 + nx - 1) = x \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\alpha_n \in [0\,;1]$, d'après la question précédente $\mathrm{P}_{n+1}(\alpha_n) - \mathrm{P}_n(\alpha_n) \geqslant 0$.

Or, $\mathrm{P}_n(\alpha_n) = 0$ entraîne $\mathrm{P}_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 0$ qui implique à son tour $\alpha_{n+1} \in [\alpha_n\,;+\infty[$ *i.e.* $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$.

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(d) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle converge vers un réel α d'après le théorème de la limite monotone.

En passant à la limite dans les inégalités larges de (XX.1), on obtient :
$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

4 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} + 1 - 1 = \frac{1}{n^5} \geqslant 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toujours grâce à la **stricte** croissance de P_n sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 0 \iff \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \mathrm{P}_n(\alpha_n) \iff \frac{1}{n} \geqslant \alpha_n.$$

(c) Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ alors, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

5 Par hypothèse, on a $\mathrm{P}_n(\alpha_n) = 0 \iff n\alpha_n - 1 = -{\alpha_n}^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après la question précédente.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\frac{1}{n}} = 1$ *i.e.* $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

En particulier, par compatibilité de la relation $\sim$ avec le produit, ${\alpha_n}^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^5}$.

La même relation s'écrit alors :

$$n\alpha_n - 1 = -{\alpha_n}^5 \iff n\left(\alpha_n - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^5} \iff \frac{1}{n} - \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^6}.$$

On a ainsi obtenu un développement asymptotique de α_n à l'ordre 6 en $\dfrac{1}{n}$:

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Problème 2 :

Partie I

1 f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de telles fonctions.

De plus, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{ch}\,(x) - 1 > 0$ car $\mathrm{ch}\,(x) \geqslant 1$ pour tout réel x.

Continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, la fonction f établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image.

Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$.

La fonction f étant impaire, on en déduit immédiatement, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Finalement, on a prouvé que f établissait une bijection (seulement continue pour l'instant) de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de f ne s'annule pas, la fonction f^{-1} est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Commentaires : *C'est quand même dommage de voir encore au second semestre des élèves ne pas savoir que la dérivée de* sh *est* ch *ou que cette dernière est minorée par* 1*. À un moment ou à un autre, il va falloir vous rendre compte que le peu que vous saviez du lycée n'est pas suffisant pour la prépa et que c'est bien d'apprendre ses cours.*

2 D'après la question précédente, f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0.

Soit $y \in \mathbb{R}$. En utilisant l'imparité de f, on a :

$$f(f^{-1}(-y)) = -y = -f(f^{-1}(y)) = f(-f^{-1}(y))$$

Comme f est injective,

$$f(f^{-1}(-y)) = f(-f^{-1}(y)) \implies f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y).$$

Ainsi, f^{-1} est impaire.

Commentaires : *Même si c'est un fait général, ici on vous demandait de prouver que la réciproque d'une fonction impaire est impaire.*

3 Comme sh admet un DL à l'ordre 4 en 0, f aussi et on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} = 2\left[x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right] - x = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

4 Comme f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre en 0.

Comme f^{-1} est impaire, son DL d'ordre 4 en 0 est de la forme :

$$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

Par composition des développements limités, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ a_1\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) + a_3\left(x + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^3 &\underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ a_1 x + \left(\frac{1}{3}a_1 + a_3\right)x^3 &\underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

Par unicité des développements limités, on peut identifier les coefficients :

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_1 + 3a_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_3 &= -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Finalement,

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

5 Comme f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, c'est également le cas de sa dérivée $\left(f^{-1}\right)'$ qui admet aussi un développement limité à tout ordre en 0 d'après le théorème de Taylor-Young.

On sait qu'alors celui-ci est obtenu en dérivant celui de f^{-1} :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

PARTIE II

6 On a facilement $g(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{3}x^2 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ d'après les théorèmes sur les équivalences « existence de DL_0 et continuité ».

Comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas, g est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut donc la prolonger par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier en posant $g(0) = 1$.

7 Pour les mêmes raisons, g (son prolongement en fait) est facilement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

D'après les théorèmes sur les équivalences « existence de DL_1 et dérivabilité », on en déduit également qu'elle est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.

Il suffit enfin de conclure avec le théorème « de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ » : g continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ dont la dérivée admet une limite finie en 0 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(0) = 0.$$

8 D'après la question précédente, la fonction g, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est dérivable et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{x\left(f^{-1}\right)'(x) - f^{-1}(x)}{x^2}$$

Avec les DLs de f^{-1} et $\left(f^{-1}\right)'$ obtenus à la partie précédente, on a :

$$\begin{aligned}
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left[x\left(1 - x^2 + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\right]\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left[x - x^3 - x + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right] = \frac{1}{x^2}\left[-\frac{2}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right]\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{3}x + \mathrm{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

Donc, $g'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{2}{3}x$.

En particulier, en retrouve $g'(0) = 0$.

Commentaires : *g n'est que classe $\mathscr{C}^1$ donc n'admet qu'un DL_1 et vous ne pouvez pas affirmer dériver le DL de g pour obtenir un DL_1 de g'. Seulement DL_0 de cette manière.*

9 Au voisinage de 0, deux fonctions équivalentes (en 0) ont le même signe.

Or, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $-\dfrac{2}{3}x \leqslant 0$. Il existe donc un voisinage de 0 à par valeurs supérieures *i.e.* un intervalle de la forme $[0\,;\alpha]$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sur lequel $g'(x) \leqslant 0$.

En conclusion, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que g soit décroissante sur $[0\,;\alpha]$.

Commentaires : *Les équivalents ne sont vrais que sur un voisinage de 0 donc n'espérez pas avoir des informations globales à partir d'un développement limité qui porte pourtant bien son nom : « LI.MI.TÉ ! ».*

Partie III

10 Comme on a déjà prouvé que f était bijective sur $\mathbb{R}$, il est inutile ici d'invoquer le théorème de la bijection. Il suffit de composer par f^{-1} :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} &\iff \frac{x}{n} = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\iff x = nf^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\\
&\iff x = g\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution réelle $u_n = g\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

11 Comme la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, par composition par des fonctions décroissantes, $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante puis $\left(u_n = g\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante si g est décroissante.

Or, d'après 9, g l'est sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$. Il suffit donc de « faire rentrer » les $\frac{1}{n}$ dedans.

Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge positivement vers 0, il existe $n_0(\alpha)\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \implies 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \alpha.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante à partir d'un certain rang (ici n_0).

Commentaires : *Le sujet ne demande pas ce rang explicitement mais il n'est pas dur de trouver* $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$.

On conclut par composition de limite avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1$ par continuité de g.

En conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang et converge vers 1.

Commentaires : *À partir de la question précédente et du développement limité de g en 0, on avait déjà, par composée à droite, la limite de* $u_n = g\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. *mais l'énoncé était ainsi fait.*

12 Comme $g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{3}x^2 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$, avec $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$,

$$\begin{aligned} u_n &= g\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{3n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \\ u_n - 1 &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{3n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc, $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n^2}$.

Commentaires : *L'écriture* $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n^2}$ *montre, qu'à partir d'un certain rang, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 1 par valeurs inférieures. Cela ne prouve pourtant pas la croissance de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 3 :

1
- Si $\mathrm{P} = 1$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = 1 - 1 = 0$ donc $\mathrm{P} = 1$ est une solution de (E).
- Si $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{X}}{2}$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{X}+2}{2} - \frac{\mathrm{X}}{2} = 1 = \mathrm{X}^0$ et $\mathrm{P}(0) = \frac{0}{2} = 0$ donc $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{X}}{2}$ est une solution de (E_0).
- Si $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{X}^2}{2}$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \frac{(\mathrm{X}+2)^2}{2} - \frac{\mathrm{X}^2}{2} = \frac{2\mathrm{X}+4}{2} = \mathrm{X}+2$ donc $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{X}^2}{2}$ n'est solution d'aucune équation précitée.

Commentaires : *Si* $\mathrm{P} \equiv 1_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$ *alors* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^n) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k) = \mathrm{P}(n\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\ldots) = 1_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$ *!*

2 (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 1$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que P admet une racine complexe donc $\exists \alpha \in \mathbb{C}, \mathrm{P}(\alpha) = 0$.

(b) Montrons ce résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ et posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ la propriété « $\alpha + 2k$ est une racine de P ».

Initialisation. Si $k = 0$ alors $\alpha + 2\times 0 = \alpha$ est une racine de P d'après la question précédente. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie *i.e.* $\mathrm{P}(\alpha + 2k) = 0$.

Or, P est une solution de (E) donc en évaluant cette équation en $\alpha + 2k$, on a :

$$\mathrm{P}(\alpha + 2k + 2) - \underbrace{\mathrm{P}(\alpha + 2k)}_{=0} = 0 \iff \mathrm{P}(\alpha + 2(k+1)) = 0.$$

Donc $\alpha + 2(k+1)$ est aussi une racine de P et $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. Initialisée pour $k=0$ et héréditaire, la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \alpha + 2k \text{ est une racine de P.}$$

(c) D'après les questions précédentes, si P est une solution de (E) telle que $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 1$ alors P admet une infinité de racines distinctes.

C'est donc le polynôme nul ce qui contredit le fait que $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 1$.

Dès lors les seules solutions possibles de (E) sont les polynômes constants.

Réciproquement, soit $\mathrm{P} = \lambda$ un polynôme constant de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *i.e.* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \lambda - \lambda = 0$: P est solution de (E).

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$, l'ensemble des polynômes constants.

3 Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient P et Q deux solutions de (E_n). Alors,

$$\begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n, & \mathrm{P}(0) = 0 \\ \mathrm{Q}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n, & \mathrm{Q}(0) = 0. \end{cases}$$

En posant $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q}$, par soustraction des deux égalités ci-dessus, on a :

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{R}(\mathrm{X}) = 0.$$

Autrement dit, R est une solution de (E).

D'après la question précédente, c'est donc un polynôme constant et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q} = \lambda$.

En évaluant en 0, on obtient $\mathrm{R}(0) = 0 - 0 = \lambda$ donc R est le polynôme nul ou encore $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ ce qui démontre que :

$$(\mathrm{E}_n) \text{ admet au plus une solution.}$$

Commentaires : *Certes, deux polynômes sont égaux si, et seulement si ils ont les mêmes coefficients mais surement pas des sommes de polynômes du genre $\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$. Pour ceux-là, il faut invoquer d'autres théorèmes et, notamment, passer par le nombre de leurs racines. Pour peu que ce nombre soit supérieur à leur degré, on pourra conclure à la nullité du polynôme.*

4 Soit P une solution de (E_n).

(a) Par dérivation (formelle) de (E_n), on obtient :

$$\mathrm{P}^{(n+1)}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}^{(n+1)}(\mathrm{X}) = \left(\mathrm{X}^n\right)^{(n+1)} \iff \mathrm{P}^{(n+1)}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}^{(n+1)}(\mathrm{X}) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{P}^{(n+1)} \text{ est une solution de (E).}$$

(b) D'après la question précédente et la question 2, on sait que $\mathrm{P}^{(n+1)}$ est un polynôme constant.

Donc, nécessairement, $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n+1$.

5 Mise en pratique des résultats précédents, on cherche donc un polynôme P de degré inférieur à 2 : $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

En se rappelant que deux polynômes sont égaux si, et seulement si ils ont les mêmes coefficient, on traduit (E_1) sur ces derniers :

$$\text{P est solution de } (\mathrm{E}_1) \iff \mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(0) = 0.$$

On a déjà $a_0 = \mathrm{P}(0) = 0$ puis

$$\begin{aligned}
&\iff a_1(\mathrm{X}+2) + a_2(\mathrm{X}+2)^2 - (a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2) = \mathrm{X} \\
&\iff 2a_1 + 4a_2 + (a_1 + 4a_2 - a_1)\mathrm{X} + (a_2 - a_2)\mathrm{X}^2 = \mathrm{X} \\
&\iff 2a_1 + 4a_2 + 4a_2\mathrm{X} = \mathrm{X} \\
&\iff \begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 + 2a_2 & = 0 \\ 4a_2 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 & = -\dfrac{1}{2} \\ a_2 & = \dfrac{1}{4} \end{cases} \\
&\iff \mathrm{P} = \frac{1}{4}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{X}.
\end{aligned}$$

D'après 3, c'est la seule solution.

Finalement, l'unique solution de (E_1) est

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{X} = \frac{\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}}{4}.$$

Problème 4 :

Partie 0 : Questions liminaires

1 Somme de termes positifs, la suite $\left(\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k|\right)_{n \geqslant \mathrm{N}}$ est croissante.

De plus, $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k| &\leqslant \mathrm{M} \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \lambda^k = \mathrm{M}\lambda^{\mathrm{N}} \frac{1-\lambda^{n-\mathrm{N}+1}}{1-\lambda}, \quad (\lambda \neq 1) \\
\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k| &\leqslant \frac{\mathrm{M}\lambda^{\mathrm{N}}}{1-\lambda}. \quad (0 < \lambda < 1)
\end{aligned}$$

La suite $\left(\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k|\right)_{n \geqslant \mathrm{N}}$ est donc également majorée, elle converge.

2 C'est simplement la traduction avec les O de l'hypothèse précédente sur les v_n :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\lambda^n\right) \iff \exists \mathrm{M} > 0, |v_n| \leqslant \mathrm{M}\,\lambda^n \quad \text{à partir d'un certain rang N.}$$

D'après la question précédente, on conclut encore à la convergence de la suite $\left(\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |v_k|\right)_{n \geqslant \mathrm{N}}$.

Commentaires : *On vient en fait de prouver et d'admettre en partie comme le demandait l'énoncé un résultat que l'on reverra : « si le terme d'une série est dominée par celui d'une série absolument convergente alors elle converge. »*

Partie I

3 (a) Comme sin admet un DL à tout ordre, il en est de même pour f et au moins à l'ordre 1.

On trouve :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \mathrm{o}\left(x\right).$$

Comme dans le problème précédent, f continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas se prolonge alors par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Commentaires : *Maintenant qu'on a vu les DLs cessez de me parler de limite de taux d'accroissement que vous faites toujours sans me préciser la dérivabilité de la fonction en 0 donc toujours aussi faux.*

Ce prolongement continue sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, dérivable en 0 avec $\tilde{f}'(0) = 0$. Le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ permet de conclure :

f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

Commentaires : *Voir qu'il s'agit du théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ à appliquer ne suffit pas. Il faut également savoir énoncer et vérifier toutes ses hypothèses correctement.*

b) Suivons l'indication :

Pour tout $x > 0$, la fonction $\varphi : t \longmapsto (x\cos(x) - \sin(x))t^2 - x^2(t\cos(t) - \sin(t))$ est continue sur $[0\,;x]$ et dérivable sur $]0\,;x[$.

D'après le théorème de Rolle (appliqué à φ par rapport la variable t),

$$\begin{aligned}
\exists\, c \in \,]0\,;x[\,, \varphi'(c) = 0 &\iff 2(x\cos(x) - \sin(x))c + cx^2\sin(c)) = 0 \\
&\iff 2(x\cos(x) - \sin(x)) + x^2\sin(c)) = 0 \quad (c \neq 0) \\
&\iff \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{\sin(c)}{2} \quad (x \neq 0) \\
&\iff f'(x) = -\frac{\sin(c)}{2}.
\end{aligned}$$

c) Comme, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $|\sin(c)| \leqslant 1$, le résultat découle trivialement de la question précédente pour $x > 0$.

Comme $f'(0) = 0$, elle est encore vraie pour $x \geqslant 0$. L'imparité de f', dérivée d'une fonction paire, fait le reste pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

d) Soit ℓ un point fixe de f, c'est-à-dire tel que $f(\ell) = \ell$. Supposons qu'il existe deux points fixes distincts ℓ_1 et ℓ_2, avec $\ell_1 < \ell_2$.

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\ell_1\,;\ell_2]$, il existe un point $c \in \,]\ell_1\,;\ell_2[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(\ell_2) - f(\ell_1)}{\ell_2 - \ell_1} = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} = 1,$$

ce qui est impossible puisque nous avons montré que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout x.

Par conséquent, f ne peut avoir qu'un seul point fixe.

Commentaires : *Personne ne vous demandait de prouver l'existence du point fixe que vous ne serez d'ailleurs pas capables de montrer avant très longtemps. Son existence est inaccessible en prépa.*

e) D'après la question 3 b), $\exists\, c_\ell \in \,]0\,;\ell[\, \subset \,]0\,;1[\, \subset \,]0\,;\pi[$ tel que $f'(\ell) = -\dfrac{\sin(c_\ell)}{2} \neq 0$.

Donc $f'(\ell) \neq 0$.

f) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Comme $u_0 = 0$ et $\ell \in \,]0\,;1[$, $|u_0 - \ell| \leqslant 1 = \dfrac{1}{2^0}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'il existe un entier n tel que celle-ci soit vraie.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $[u_n\,;\ell]$ ou $[\ell\,;u_n]$, on obtient encore :

$$|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n-\ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée à partir de $n=0$, elle l'est pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ |u_n-\ell| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

(g) Il suffit de résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3} \iff n\log(2) \geqslant 3 \iff n \geqslant \frac{3}{\log(2)}.$$

On prendra $n = \left\lfloor \dfrac{3}{\log(2)} \right\rfloor + 1$.

Comme $0 < \log(1) < \log(2) = \dfrac{1}{3}\log(8) < \dfrac{1}{3}\log(10) \simeq 0{,}3^+$ alors $\dfrac{3}{\log(2)} \simeq \dfrac{3}{0{,}3^+} \simeq 10^-$.

De tête, on pourrait prendre $n=10$ ce que confirme la calculatrice pour avoir, au moins, une approximation de ℓ à 10^{-3} près.

Partie II

4 Comme $|f'(\ell)|<1$, il existe $\eta\in\,]0\,;1[$ tel que $|f'(\ell)|\leqslant\eta<1$.

Par continuité de f', il existe donc $r>0$ tel que $\forall\, x\in\,]\ell-r\,;\ell+r[$, $|f'(x)|\leqslant\eta$.

Comme ℓ est intérieur à I, quitte à réduire r, on peut supposer $]\ell-r\,;\ell+r[\,\subset \mathrm{I}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, f est η-lipschitzienne sur $]\ell-r\,;\ell+r[$.

Enfin, $\forall\, x\in\,]\ell-r\,;\ell+r[$, $|f(x)-\ell|\leqslant\eta\,|x-\ell|<r$ entraine la stabilité de $]\ell-r\,;\ell+r[$ par f ce qui finit de répondre à la question.

5 (a) Le même raisonnement que celui mené à la question **3** (f) avec $|f'(\ell)|\leqslant\eta$ montre qu'il existe un rang à partir duquel $|u_n-\ell|\leqslant|u_0-\ell|\,\eta^n$. C'est exactement dire que $u_n-\ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\eta^n\right)$.

(b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et f de classe $\mathscr{C}^2$ dans un voisinage de ℓ, d'après le théorème de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}
f(u_n) &\underset{n\to+\infty}{=} f(\ell)+f'(\ell)\,(u_n-\ell)+\mathrm{O}\left((u_n-\ell)^2\right)\\
u_{n+1} &\underset{n\to+\infty}{=} \ell+f'(\ell)\,(u_n-\ell)+\mathrm{O}\left((u_n-\ell)^2\right)\\
u_{n+1}-\ell &\underset{n\to+\infty}{=} f'(\ell)\,(u_n-\ell)+\mathrm{O}\left((u_n-\ell)^2\right)\\
\frac{u_{n+1}-\ell}{f'(\ell)\,(u_n-\ell)} &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathrm{O}\left((u_n-\ell)\right) \qquad \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non stationnaire}\right)
\end{aligned}$$

Avec $u_n-\ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\eta^n\right)$, on obtient $a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathrm{O}\left(\eta^n\right)$.

(c) Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathrm{O}\left(\eta^n\right)$, $\exists\,\mathrm{M}>0$ tel que $|a_n-1|\leqslant \mathrm{M}\eta^n$.

Comme $0<\eta<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n-1| = \lim\limits_{n\to+\infty}\eta^n=0$ *i.e.* la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 strictement positif.

Il existe donc un rang N à partir duquel la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

(d) Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathrm{O}\left(\eta^n\right)$, alors $|\ln(a_n)| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\eta^n\right)$ avec $0<\eta<1$.

D'après **2**, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n}|\ln(a_k)|\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ puis $\left(\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n}\ln(a_k)\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ convergent.

(e) D'après la question précédente, la suite $\left(\sum_{k=N}^{n} \ln(a_k)\right)_{n \geqslant N}$ converge donc il existe un réel S tel que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{n} \ln(a_k) &\underset{n\to+\infty}{=} S + o(1)\,.\\
\sum_{k=N}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}-\ell}{f'(\ell)\,(u_k-\ell)}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} S + o(1)\,.\\
\ln\left(\prod_{k=N}^{n}\left(\frac{u_{k+1}-\ell}{f'(\ell)\,(u_k-\ell)}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} S + o(1)\,.\\
\ln\left(\frac{1}{f'(\ell)^{n-N+1}}\prod_{k=N}^{n}\left(\frac{u_{k+1}-\ell}{u_k-\ell}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} S + o(1)\,.
\end{aligned}$$

En reconnaissant un produit télescopique ; on a :

$$\ln\left(\frac{1}{f'(\ell)^{n-N+1}}\,\frac{u_{n+1}-\ell}{u_N-\ell}\right) \underset{n\to+\infty}{=} S + o(1)\,.$$

En composant par l'exponentielle,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(\ell)^{n-N+1}}\,\frac{u_{n+1}-\ell}{u_N-\ell} &\underset{n\to+\infty}{=} e^{S+o(1)}.\\
u_{n+1}-\ell &\underset{n\to+\infty}{=} f'(\ell)^{n-N+1}\,(u_N-\ell)\,(\,e^{S}(1+o(1)\,)\,)\,.\\
u_{n+1}-\ell &\underset{n\to+\infty}{=} f'(\ell)^{n+1}\,\underbrace{\frac{(u_N-\ell)\,e^{S}}{f'(\ell)^{N}}}_{=\alpha\in\mathbb{R}^*}\,(1+o(1)\,).\\
u_{n+1}-\ell &\underset{n\to+\infty}{=} \alpha f'(\ell)^{n+1}(1+o(1)\,).
\end{aligned}$$

En réindexant, on a montré l'existence d'un réel $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour lequel :

$$u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha f'(\ell)^n.$$