Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

1 Analyse asymptotique

Même si les Développements limités sont supposés connus à vie, revoir les DL usuels. On demandera à chaque étudiant un calcul raisonnable sur les DL.

2 Dénombrement

- Un ensemble est fini s'il est en bijection avec $[\![1;n]\!]$, son cardinal est alors n. Deux ensembles ont le même cardinal si et seulement s'ils sont en bijection.
- Un sous-ensemble d'un ensemble est un ensemble fini et de cardinal plus petit (admis). Cas d'égalité des cardinaux.
- Caractérisation des bijections sur et dans des ensembles finis.
- Ensembles disjoints, cardinal de l'union disjointe. Notation $\sqcup$.
- Cardinal du complémentaire, de l'union quelconque, de l'ensemble produit de deux ensembles finis.
- p-uplet, ensemble des p-uplets, cardinal de E^p.
- Application de E dans F, cardinal de $\mathrm{F}^{\mathrm{E}} = \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
- Arrangement, nombre d'arrangements de p éléments parmi n, notation A_n^p et calcul. Nombre d'injections.
- Permutation, définition et calcul.
- Combinaison : une combinaison est une partie de p éléments dans un ensemble à n éléments. Nombre de combinaisons, notation et calcul avec des factoriels.
- Rappels des formules sur les combinaisons, formule de Pascal et de Newton.
- Parties de E, $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. Cardinal de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

3 Espaces Vectoriels

- Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Définition d'une combinaison linéaire, d'un sev.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels comme des sous-ensembles contenant 0_{E} et stables par combinaisons linéaires.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. C'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion. Opérations élémentaires sur la famille engendrant l'espace.
- Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.
- Espaces en somme directe, espaces supplémentaires. Définition et caractérisation.

Questions de cours possibles [1] :

On demandera à chaque étudiant de réciter un DL usuel : e^x, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan(x)$ à un ordre raisonnable (4/5) en prélude.

1 Déterminer le nombre de parties de E (en explicitant le décompte des parties de E à k éléments)

2 $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.

3 $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est un sous espace vectoriel de E.

4 Caractérisation de la somme directe.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.